Université de Rennes 1 — 2022-2023
UFR de Mathématiques — Licence 3

Fonctions Holomorphes
Contrôle du 10 février (1 heure)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

NOM : **Prénom :**

Groupe TD : **GR1** **GR2** **GR3** **MAG**

EXERCICE 1 Questions de cours.

(1) Rappeler les equations de Cauchy Riemann. Vérifier les equations pour la fonction $f(z) = z^3$.

(2) (a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$.
(b) Donner un exemple d'une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence $R > 0$ telle que $|a_n| \to +\infty$.
(c) Donner un exemple d'une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence $R = 0$.

EXERCICE 2 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non-constante.

(1) Déterminer le domaine de définition $V \subset \mathbb{C}$ de l'application $g : z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$.

(2) Est-ce que g est une fonction holomorphe sur V ?

(3) Est-ce que $\overline{f}$ est holomorphe ?

EXERCICE 3 On dit qu'une application $f : D \to \mathbb{C}$ conserve les distances si pour tout $z, w \in D$ on a $|f(z) - f(w)| = |z - w|$.

(1) Montrer que si f est une transformation de Möbius qui conserve les distances et $f(0) = 0$, alors f est une rotation, i.e. $f(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

(2) Montrer que pour tout $z_0 \in \Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ il existe $f \in Aut(\Delta)$ tel que $f(z_0) = 0$.