Chapitre 4 : Étude globale de fonctions

Continuité, Dérivabilité – renforcement

Exercice 4.1. Calculer la dérivée de arcsin.

Exercice 4.2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, (avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tel que $ad - bc \neq 0$ des constantes pour la **9**.).

1.	xe^x	**2.**	$\dfrac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}$	**3.**	$\sqrt{x^2+e^x}$
4.	$\dfrac{1+\sqrt{x}}{(1+x)^{1/3}}$	**5.**	$\ln(\ln(x))$	**6.**	$\cos(x\ln(x))$
7.	$\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$	**8.**	$\sqrt{x^2+1}-x$	**9.**	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$
10.	$x+\arctan\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$	**11.**	$\dfrac{x}{\ln(x)}+\arcsin(x^2)$	**12.**	$\arctan\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
13.	$\arccos(2x^2-1)$	**14.**	$\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$	**15.**	$\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
16.	$\ln(1+x^4)$	**17.**	$\dfrac{x}{\ln(x)}$	**18.**	$x-2\ln(3e^x+3)$
19.	$\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$	**20.**	$\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}$	**21.**	$x+3\text{arctan}x-\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 4.3. Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^2 = 1$. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 4.4. Étudier les limites suivantes :

1.	$\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$	en 1	**2.**	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	en 1
3.	$\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$	en $+\infty$	**4.**	$\sqrt{x^2+2x}-x$	en $+\infty$
5.	$x^5e^{-x^2}$	en $+\infty$	**6.**	$\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$	en $+\infty$
7.	$\dfrac{x\ln x+7}{x^2+4}$	en $+\infty$	**8.**	$\dfrac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}$	en $+\infty$.

Exercice 4.5. Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ **2.** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ en 0

3. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$ **4.** $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ en 0

5. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

Exercice 4.6. Trouver les limites suivantes à l'aide du nombre dérivé :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x+2}-e^2}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$ **4.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Extrémum

Exercice 4.7. Soit $f(x)=|x^2-4|$.
(a) Déterminer les points critiques de f (c.à.d. les points où f' est définie et vaut 0).
(b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de $f(x)$.

Exercice 4.8. Déterminer (s'ils existent) les minima, maxima locaux et globaux de

(a) $(x^2-1)^2$ (b) $x^2\exp\left(-x^2\right)$

Exercice 4.9. Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.
(a) $x^2+2x-3, \quad -2\leqslant x\leqslant 2$ (b) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3\leqslant x\leqslant 3$

Accroissements finis

Exercice 4.10. (a) Soit $f(x)=x^2$, et soient a,b deux réels avec $a<b$. Déterminer l'ensemble des $c\in]a,b[$ tels que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. .
(b) Soit $f(x)=x^n$, et soient a,b deux réels avec $0\leqslant a<b$. Déterminer l'ensemble des $c\in]a,b[$ tels que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 4.11. Soit $f(x)=\arctan(x)$, $a=0$, $b=1$. Déterminer s'il existe $c\in]a,b[$ (et le cas échéant le déterminer) tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Inégalités

Exercice 4.12. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

Exercice 4.13. Démontrer l'inégalité suivante :
$$\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Variations

Exercice 4.14. Étudier les variations des fonctions suivantes :
$$f_0(x) = \ln(1+x^4) \quad , \qquad f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} \quad , \qquad f_2(x) = x - 2\ln\left(3e^x + 3\right)$$

Exercice 4.15. Étudier les variations des fonctions suivantes :
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad , \qquad g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Asymptotes

Exercice 4.16. Etudier l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ des graphes des fonctions données par les formules

(a) $f_1(x) = 2x + \sqrt{x}$ (b) $f_2(x) = \frac{3x^2+x}{x+1}$ (c) $f_3(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (d) $f_4(x) = x \cdot \sin(x)$

(e) $f_5(x) = 3x + \sin(x)$ (f) $f_6(x) = x + \dfrac{\sin(x)}{x}$ (g) $f_7(x) = \sqrt{x^2+x}$ (h) $f_8(x) = \ln(\frac{1+e^x}{2})$

Etude complète de fonction

Exercice 4.17. Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

(a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (c) $f(x) = \ln(1+e^x)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ (f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

Exercice 4.18. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et sa parité.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
3. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x^4 - 4x^2 - 1$.
4. En déduire les variations de f.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 4.19. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Trouver un sous-domaine $D \subset D_f$ tel que f soit une bijection de D sur $f(D_f)$.
4. Utiliser un théorème du cours pour montrer, sans calculs, que f admet une fonction réciproque définie sur D. Quelle est l'image de f^{-1} ?
5. Tracer f et sa réciproque f^{-1} dans un même repère.
6. Trouver par le calcul l'expression de f^{-1}. Retrouver les résultats précédents.

Exercice 4.20. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + 3\text{arctan}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. Déterminer le signe de $\dfrac{x-1}{x+1}$ selon les valeurs de x .
2. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
3. Vérifier que f est impaire.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^4+x^2-6}{x^4-1}$$

5. En déduire que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^4 + x^2 - 6$.
6. Étudier les variations de f.

Exercice 4.21. On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et sa parité éventuelle.
2. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que $f'(x)$ et $f(x)$ sont de signes opposés pour tout $x \in \tilde{\mathcal{D}}$.
4. En déduire les variations de f.
5. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
6. Déterminer les asymptotes du graphe de f.
7. Tracer le graphe de f.