Chapitre 3 : Limites, dérivées, étude locale de fonctions, continuité

Limite

Exercice 3.1. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\text{(a)}\ \exp\left(\frac{1}{x}\right),\quad x=0 \qquad \text{(b)}\ \exp\left(\frac{|x|}{x}\right),\quad x=0 \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1},\quad x=1.$$

Solution (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Nous remarquons (même si ce n'était pas demandé) que $\lim_{x\to+\infty}\exp(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty}\exp(\frac{1}{x}) = \exp(0) = 1$. Dessinez le graphe ! (b) $f(x) = \exp(1) = e$ si $x > 0$, et $f(x) = \exp(-1) = \frac{1}{e}$ si $x < 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{e}$ (c) $= \frac{|x-1|}{x-1}$, donc $\lim_{x\to 1^+} = 1$, $\lim_{x\to 1^-} = -1$.

Exercice 3.2. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos(x),\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}|x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\exp(\sin(x)-x),\quad \text{(e)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{2x^2},\quad \text{(f)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos(x)}{x-1}.$$

Solution (a) Encadrement $-|x| \leqslant |x|\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$, et on applique le théorème des gendarmes. (b) Encadrement $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos(x) \leqslant e^{-x}$ (c) Encadrement $-|x-1| \leqslant |x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \leqslant |x-1|$

(d) Encadrement $0 < \exp(\sin(x)-x) \leqslant \exp(1-x) = e\cdot e^{-x}$

Exercice 3.3. Évaluez les limites suivantes (sans utiliser la règle de l'Hôpital)

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4},\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1},\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2},$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2\ln x},\quad \text{(e)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2},\quad \text{(f)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4},$$

$$\text{(g)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\sin(x) \qquad \text{(h)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2} \qquad \text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln(x)$$

Solution (a) $= \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{x+2} \to 0$, (b) $= \lim_{x\to 0}\frac{(\exp(x))^2-1}{\exp(x)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\exp(x)-1)(\exp(x)+1)}{\exp(x)-1} = 2$, (c) $= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2})(\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{1+2x^2})}{x^2(\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{1+2x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2(\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{1+2x^2})} = -2$. (d) $= \frac{1+\frac{2}{x}}{x\cdot\ln(x)}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$ parce que les deux facteurs tendent vers $+\infty$. Réponse 0. (d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x^{-3/2}+x^{-5/}}{x^{-3/2}-x^{-2}-1}$ -1, (e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(1-\frac{4}{x})} = -\sqrt{2}$ (f) $\geqslant \frac{x}{2}-1$, qui tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\frac{x}{2}+\sin(x) = +\infty$. (g) $\overset{t=x^2}{=}$ $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2+2} = +\infty$ par croissance comparée (h) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(1-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}) = +\infty$ car, par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$.

Exercice 3.4. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)},\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})},\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)},\quad \text{(d)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}.$$

Solution Rappel : $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$. (a) $\stackrel{t=\ln(x)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. (b) $\stackrel{t=\sqrt{2x}}{=} \lim_{t\to 0_+} \frac{t}{\sin(t)} = 1$ (c) $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin(x))}{\arcsin(x)} \stackrel{t=\arcsin(x)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. (d) $\stackrel{t=\exp(x)}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\arcsin(t)}{t} = 1$ comme dans (c).

Exercice 3.5. Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x}{4x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+5}{2x^3+40}.$$

Définition de la dérivée

Exercice 3.6. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. **Solution** $\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t} = \frac{(\sqrt{x+t}-\sqrt{x})(\sqrt{x+t}+\sqrt{x})}{t\cdot(\sqrt{x+t}+\sqrt{x})} = \frac{t}{t\cdot(\sqrt{x+t}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+t}+\sqrt{x}} \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3.7. Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}, \qquad (c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},$$
$$(d)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x-1}, \qquad (e)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, \qquad (f)\quad \lim_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$$

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.8. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a)}\ 8x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{(b)}\ e^x\sin(x) \qquad \text{(c)}\ \frac{1-4x}{x^{2/3}} \qquad \text{(d)}\ 3^x\sin(x)$$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition où la fonction en question est dérivable et
(ii) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Solution (a) Pour $x > 0$, $\frac{6}{\sqrt[4]{x}}$, (b) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x(\sin(x)+\cos(x))$, (c) pour $x > 0$, $-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$
(d) pour $x \in \mathbb{R}$, $3^x \cdot (\ln(3)\cdot\sin(x)+\cos(x))$

Exercice 3.9. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{x+e^x}$ (c) $\cos(x\cdot\ln(x))$ (d) 2^{-x}

(e) $\ln(\ln(\ln(x)))$ (f) $\ln(x\cdot\sin(x))$ (g) $2^{x\cdot\sin(x)}$ (h) $xe^{\frac{1}{x}}$

Solution Ne pas oublier le domaine de définition ! (a) défini pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, (b) domaine de définition ?, $f'(x) = \frac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$, (c) défini pour $x > 0$, $f'(x) = -\sin(x\cdot\ln(x))\cdot(1+\ln(x))$,
(d) défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\ln(2)\cdot 2^{-x}$, (e) défini pour $x > e$, $f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))\cdot\ln(x)\cdot x}$,
(f) défini si $x \in ...\cup]-5\pi,-4\pi[\cup]-3\pi,-2\pi[\cup]-\pi,0[\cup]0,\pi[\cup]2\pi,3\pi[\cup]4\pi,5\pi[\cup...$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$,
(g) défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2^{x\cdot\sin(x)}\cdot\ln(2)\cdot(\sin(x)+x\cos(x))$, (h) défini pour $x \neq 0$, $f'(x) = (1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$,

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.10. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$, (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{x^2}$, (e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$ (f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$, (h) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$, (i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2\ln x}$,

Solution (a) $= \lim \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'Ho}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$, (b) $\overset{\text{l'Ho}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = 2$, (c) Appliquer la règle deux fois. $= \lim \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim \frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0$, (d) Appliquer la règle deux fois. $= \lim \frac{5\sin(5x)}{2x} = \lim \frac{5^2\cos(5x)}{2} = \frac{25}{2}$, (e) $\overset{\text{l'Ho}}{=} \lim \frac{2\sqrt{x}}{|x+2|} \overset{\text{l'Ho}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 0$. Dans les questions suivantes, on reprend les exercices du début du chapitre. (f) $\overset{\text{l'Ho}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{2x} = \frac{0}{4} = 0$ (g) $\overset{\text{l'Ho}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\exp(2x)}{\exp(x)} = 2$ (h) $\overset{\text{l'Ho}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}-\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}}}{2x} = -2$ (i) $= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\ln(x)+x} = 0$

Fonctions continues

Exercice 3.11. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par une fonction continue d'une partie bornée est une partie bornée.

Solution Tout est faux ! On donne des contre-exemples.

1. $f(x) = e^{-x^2}$ et $f(\mathbb{R}) =]0,1]$
2. même exemple.
3. $f = \tan$ et $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3.12. Montrer que l'équation $x^3+x^2-4x+1=0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. En utilisant un raisonnement par dichotomie, donner un encadrement d'amplitude inférieur à 10^{-1} de chacune de ces racines.

Solution Posons $f(x) = x^3+x^2-4x+1$. Remarquons que $f(0) = 1 > 0$ et que $f(1) = -1 < 0$. De plus, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. On va donc appliquer trois fois le théorème des valeurs intermédiaires :

On a $0 \in f(]-\infty,0[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f, il existe $x_1 \in]-\infty,0[$ tel que $f(x_1) = 0$.

On a $0 \in f(]0,1[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f, il existe $x_2 \in]0,1[$ tel que $f(x_2) = 0$.

On a $0 \in f(]1,+\infty[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f, il existe $x_3 \in]1,+\infty[$ tel que $f(x_3) = 0$.

Puisque $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$, on a bien trouvé trois racines distinctes à l'équation. En fait, comme on a affaire à un polynôme de degré 3, il ne peut pas avoir plus de 3 racines, et on a trouvé toutes ses racines.

On va maintenant encadrer ces racines. Pour cela on va utiliser la méthode de dichotomie. Commençons par x_2, dont on sait déjà qu'elle est comprise entre 0 et 1. On calcule successivement les valeurs suivantes

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ 0{,}5 & -0{,}625 \\ 0{,}25 & 0{,}078125 \\ 0{,}375 & -0{,}306640625 \\ 0{,}3125 & -0{,}121826172 \end{array}.$$

On en déduit que $0{,}25 < x_2 < 0{,}3125$. Pour x_3, on commence par remarquer que $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 5$. x_3 est donc localisé dans l'intervalle $[1{,}2]$. La méthode de dichotomie donne cette fois :

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ 1{,}5 & 0{,}625 \\ 1{,}25 & -0{,}484375 \\ 1{,}375 & -0{,}009765625 \\ 1{,}4375 & 0{,}286865234 \end{array}.$$

On en déduit que $1{,}375 < x_3 < 1{,}4375$. Maintenant, pour x_1, il faut d'abord tatonner un encadrement grossier. On a $f(-2) = 5 > 0 > f(-3) = -5$. On applique donc la méthode de dichotomie entre -2 et -3. On trouve

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ -2{,}5 & 1{,}625 \\ -2{,}75 & -1{,}234375 \\ -2{,}625 & 0{,}302734375 \\ -2{,}6875 & -0{,}438232422 \end{array}$$

On en déduit que $-2{,}6875 < x_1 < -2{,}625$.

Exercice 3.13. Soit $f : [0{,}1] \to [0{,}1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $x_0 \in [0{,}1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Solution Appliquer le TVI à $g(x) = f(x) - x$, en utilisant les valeurs de g en 0 et 1.