Université de Rennes
ISTIC

Année 2023-2024
Analyse 1 (Licence 1)

Chapitre 2 : Fonctions classiques réelles

Domaine de définition

Exercice 2.1. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $\ln(1-x)$**Solution** $]-\infty,1[$, (b) $\ln(1-x^2)$**Solution** $]-1,1[$ (c) $\sqrt{x^2-3x-4}$**Solution** $]-\infty,-1]$

(d) $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$**Solution** $]-\infty,0[\cup]0,1]$, (e) $\tan(2x)$**Solution** $\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2} \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

Composées de fonctions

Exercice 2.2. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x)=\frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{2-x}{2+x}.$$

(a) Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.

Solution $D(f)=Im(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, $D(g)=\mathbb{R}-\{-2\}$. Pour l'image : $g(x)=\frac{2-x}{2+x}=\frac{-(2+x)+4}{2+x}=-1+\frac{4}{2+x}$, donc $Im(g)=\mathbb{R}-\{-1\}$

(b) Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g. **Solution** $f^{-1}(0)=\emptyset$, $f^{-1}(-2)=\{-\frac{3}{2}\}$, $g^{-1}(0)=\{2\}$, $g^{-1}(-2)=\{-6\}$

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle donées par

$$f_1(x)=f(f(x)), \quad f_2(x)=f(g(x)), \quad f_3(x)=g(f(x)) \quad \text{et} \quad f_4(x)=g(g(x)).$$

(c) Déterminer le domaine de définition de f_i, $i=1,\ldots,4$. **Solution** $D(f_1)=\mathbb{R}-\{0\}$, $D(f_2)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$, $D(f_3)=\mathbb{R}-\{0,-\frac{3}{2}\}$, $D(f_4)=\mathbb{R}-\{-2,-6\}$

(d) Trouver une expression simplifiée de f_i, $i=1,\ldots,4$. **Solution** $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{3(2+x)}{2-x}$, $f_3(x)=\frac{2x-3}{2x+3}$, $f_4(x)=\frac{2+3x}{6+x}$

Symétrie

Exercice 2.3. Parmi les fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

(a) $5x^4-3x^2$, **Solution** P (b) $2x^4-x^3+1$, (c) $\sin(x^3)$,**Solution** I (d) $\sin^2(x^3)$,**Solution** P

(e) $\ln(|x|)$,**Solution** P (f) $\tan(\sin(x))$,**Solution** I (g) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$, (h) $x\cdot\sin(x)$,**Solution** P (i)

$x \cdot \cos(x)$**Solution** I .

Exercice 2.4.
(a) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$. **Solution** C.à.d. $f(-1+t) = f(-1-t)$.
(b) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ est symétrique par rapport au point $M(1{,}3)$. **Solution** C.à.d. $g(1-t) - 3 = -(g(1+t) - 3)$, ou $g(1-t) + g(1+t) = 2 \cdot 3$

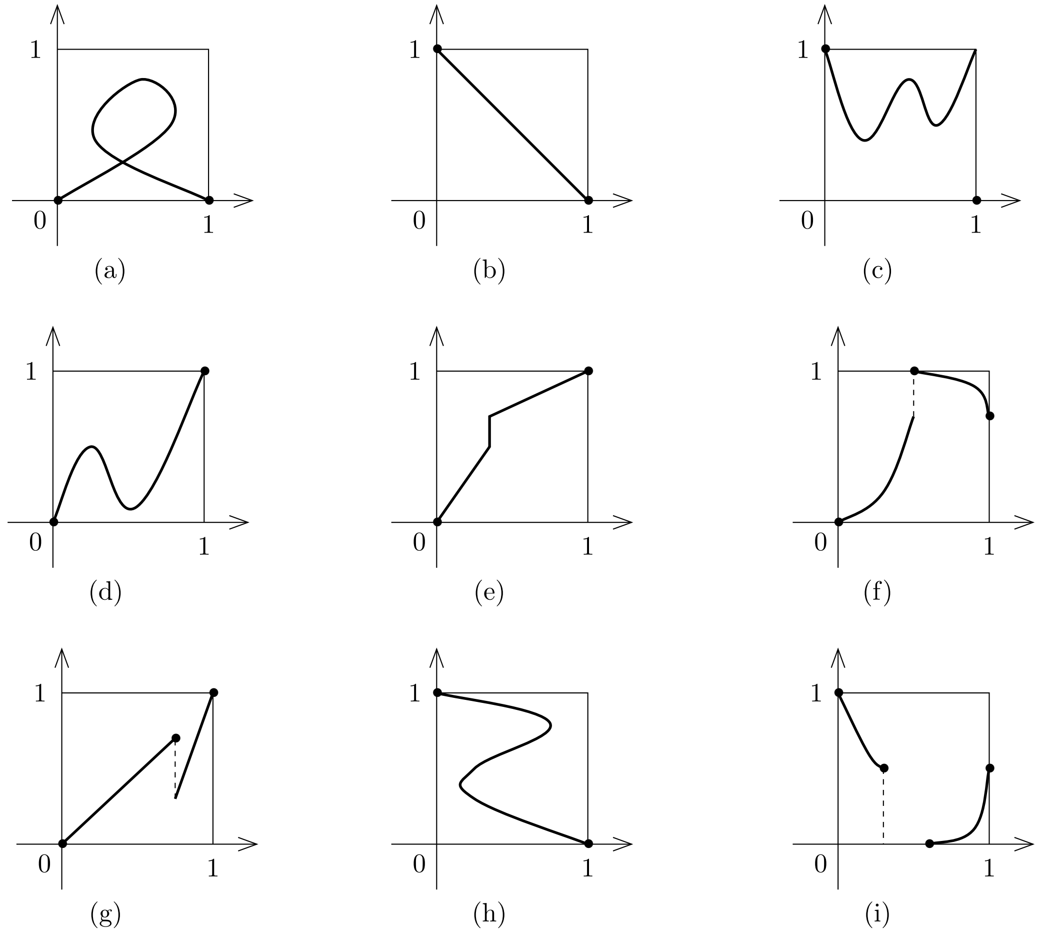
Exercice 2.5. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
(a) Montrer : si f et g sont impaires alors la composition $f \circ g$ est impaire.
(b) Montrer : si g est paire alors $f \circ g$ est paire.
(c) Montrer : si f est paire et g est impaire alors $f \circ g$ est paire.

Applications périodiques

Exercice 2.6. (a) Donner la période de la fonction $x \mapsto \sin(3x)$.
(b) Donner la période de la fonction $x \mapsto \cos(x/4)$.

Exercice 2.7. Soit f une fonction T-périodique.
(a) Montrer que f est $2T$-périodique et $(-T)$-périodique.
(b) Montrer que si f est S-périodique alors f est $S+T$-périodique.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f est nT-périodique.

Applications, injections, surjections, bijections



Exercice 2.8. Dans chacun des cas précédents indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection, bijection de $[0{,}1]$ dans $[0{,}1]$. Si c'est une bijection, dessiner le graphe de la fonction réciproque.

Exercice 2.9. Soit f la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

On admet que f est une bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-2{,}2[$. Trouver l'expression de la fonction réciproque. **Solution** Expliquer quand même pourquoi c'est une bijection... au moins pourquoi c'est injectif ($f'(x) = \frac{6}{(x^2+3)\cdot\sqrt{x^2+3}} > 0$ pour tout x). Pour la fonction réciproque : $y^2 = \frac{4x^2}{x^2+3}$ avec $y > 0$ si $x > 0$, et $y < 0$ si $x < 0$. On trouve $x^2 = \frac{3y^2}{4-y^2}$, et donc la fonction réciproque $g(y) = \frac{\sqrt{3}\cdot y}{\sqrt{4-y^2}}$.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.10. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x-5| = 4,$ **Solution** $\{\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\}$ (b) $|2x+4| < 3,$ **Solution** $]-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}[$

(c) $|x^2-x-1| \leqslant 1$ **Solution** $[-1{,}0] \cup [1{,}2]$.

Polynômes : division euclidienne

Exercice 2.11. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B, dans chacun des cas suivants :

(a) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad B(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ **Solution** $A = 1 \cdot B + (4x^2 + 2)$

(b) $A(x) = x^3 + 1, \quad B(x) = x + 2$ **Solution** $A = (x^2 - 2x + 4) \cdot B - 7$

(c) $A(x) = x^5 - x^3 + x - 1, \quad B(x) = x^2 + x - 3$ **Solution** $A = (x^3 - x^2 + 3x - 6) \cdot B + (16x - 19)$

(d) $A(x) = x^4 - 1, \quad B(x) = x^2 + (1 - i)x - i$ **Solution** $A = (x^2 - (1 - i)x - i) \cdot B$ (pas de reste)

Solution Pour donner un exemple de calcul complet, voici la question (c) :

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 \quad - x^3 \quad + \quad x - 1 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
x^5 + x^4 - 3x^3 & x^3 - x^2 + 3x - 6 \\ \hline
-x^4 + 2x^3 \quad + \quad x - 1 & \\
-x^4 - x^3 + 3x^2 & \\ \hline
3x^3 - 3x^2 + \quad x - 1 & \\
3x^3 + 3x^2 - 9x & \\ \hline
-6x^2 + 10x - 1 & \\
-6x^2 - 6x + 18 & \\ \hline
16x - 19 &
\end{array}
$$

Polynômes : résolution d'équations

Exercice 2.12. Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$. Trouver une racine en essayant plusieurs valeurs "évidentes". Soit r_1 la racine ainsi trouvée. Effectuer une division euclidienee de P par $(x - r_1)$. Soit Q le polynôme ainsi obtenu. Trouver les racines r_2 et r_3 de Q. En déduire la factorisation du polynôme P. **Solution** Racine $r_1 = 2$, quotient $Q(x) = x^2 - 2x - 1$, les racines de Q sont $r_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$. Donc la factorisation de P est $P(x) = (x - 2)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.

Exercice 2.13. Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

(a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P. **Solution** $P(-2) = -8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) + 4 = 0$

(b) Factoriser le polynôme P en facteurs linéaires. Quelle est la multiplicité de la racine -2 ? **Solution** Par division Euclidienne (en divisant $P(x)$ par $(x + 2)$) on obtient $P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$. On calcule les racines de $x^2 + 3x + 2$: -2 et -1. Donc $P(x) = (x + 2)^2(x + 1)$

(c) Esquisser le graphe de P.

Exercice 2.14. Soit $P(z) = x^3 - (2 + 3i)x^2 + (-3 + 5i)x + 6 + 2i$.

(a) Trouver la racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. **Solution** Par expérimentation on trouve la racine réelle $r_1 = 2$ (c.à.d. $P(2) = 0$). Par division Euclidienne on obtient $P = (x - 2) \cdot (x^2 - 3ix - 3 - i)$ (ca se passe bien, en fait.)

(b) Déterminer toutes les racines de P. **Solution** On connait déjà la racine $r_1 = 2$. On calcule les racines de $x^2 - 3ix - 3 - i$: on trouve $\frac{3}{2}i \pm (1 + \frac{i}{2})$, donc $r_2 = \frac{3}{2}i + (1 + \frac{i}{2}) = 1 + 2i$ et $r_3 = \frac{3}{2}i - (1 + \frac{i}{2}) = -1 + i$

Exercice 2.15. Un exemple d'un polynôme réel qui ne peut pas être décomposé en facteurs linéaires dans $\mathbb{R}[x]$: soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$.

(a) Trouver une racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. **Solution** En essayant plusieurs valeurs $(0,1,-1,2,-2,\ldots)$ on trouve la racine $a = 1$. La division Euclidienne donne $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$

(b) Montrer que P n'a pas d'autres racines réelles. En déduire la décomposition de P dans $\mathbb{R}[x]$. **Solution** Le polynôme x^2-2x+5 n'a pas de racines réelles (car $\Delta=-16$). Donc $P(x)=(x-1)(x^2-2x+5)$ est déjà la décomposition sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Décomposer P en facteurs linéaires dans $\mathbb{C}[x]$. **Solution** Les racines complexes de x^2-2x+5 sont $1\pm 2i$. Donc $P(x)=(x-1)(x-1-2i)(x-1+2i)$

Fonction logarithme, exponentielle, puissance

Exercice 2.16. Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$\text{(a)}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}, \qquad \text{(b)}\ \log_9\left(\frac{1}{27}\right) \qquad \text{(c)}\ \ln(1+\cos(x))+\ln(1-\cos(x))-2\ln(\sin(x)).$$

Solution (a) $=\frac{1}{3^x}\cdot 3^{2\cdot\frac{x}{2}}=\frac{3^x}{3^x}=1$ (b) $-\log_9(9\cdot 3)=-\log_9(9)-\log_9(3)=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ (c) $\ln(\frac{1^2-\cos^2(x)}{\sin^2(x)})=\ln(\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)})=0$

Exercice 2.17. Résoudre l'inéquation

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)>0.$$

Solution Cette expression n'est pas définie quand $x\in[-1,0]$. Quand $x>0$, on a $\frac{x}{x+1}\in]0,1[$, donc l'inéquation n'est pas satisfaite. Quand $x<-1$, on a $\frac{x}{x+1}=\frac{-x}{-x-1}>1$, donc l'inéquation est satisfaite. Solutions $]-\infty,-1[$.

Exercice 2.18. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\text{(a)}\ \ln\left(\frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}\right) \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{x(x-2)}{(x+1)(x+3)}\right)^\alpha, \quad \text{pour } \alpha\in]0,1[.$$

Solution (a) $]-2,0[\cup]1,+\infty[$ (b) $]-\infty,-3[\cup]-1,0[\cup]2,\infty[$

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.19. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(\arccos(x))$, $x\in[-1,1]$ **Solution** $=x$; (b) $\arccos(\cos(x))$, $x\in[0,\pi]$ **Solution** $=x$;

(c) $\arccos(\cos(x))$, $x\in[-\pi,0]$ **Solution** $=-x$. Dessiner le graphe de $\arccos(\cos(x))$! Joli zig-zag. ; (d) $\sin(\arccos(x))$ $x\in[-1,1]$ **Solution** Puisque $\arccos(x)\in[0,\pi]$, on a $\sin(\arccos(x))>0$. Donc $\sin(\arccos(x))=\sqrt{\sin^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-x^2}$. Le graphe est un semi-cercle !

COMPLÉMENTS

Domaine de définition

Exercice 2.20. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\text{(a)}\ x^5-3x^2+2x-7, \quad \text{(b)}\ \frac{1}{x^2-5x+6}, \quad \text{(c)}\ |\ln(x)|, \quad \text{(d)}\ \frac{1}{\sin(2x)}, \quad \text{(e)}\ \frac{1}{x\cdot\cos(x)}, \quad \text{(f)}\ \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}.$$

Composées de fonctions

Exercice 2.21. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

Exercice 2.22. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$. Déterminer f.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.23. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\ \ |x^2 - 2x - 5| = 1, \qquad \text{(b)}\ \ |x^3 - 1| = 7, \qquad \text{(c)}\ \ |2x^2 - 5x - 4| \leq 3.$$

Exercice 2.24. Tracer le graphe des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\text{(a)}\ \ |x^2 - 5x + 6|, \qquad\qquad \text{(b)}\ \ |\sin(2x)|.$$

Exercice 2.25. Tracer le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par : $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Fonction réciproque

Exercice 2.26. Soit f la fonction donnée par la formule $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$. Déterminez le domaine de définition et l'image de f et décider si f est injective ou non.
Lorsque f est bijective, trouvez l'expression de la fonction réciproque et déterminez le domaine de définition et l'image de cette dernière. Puis tracez la fonction et sa réciproque dans un même repère.

Exercice 2.27. Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donné par :

$$x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \quad \text{si} \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même graphique.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.28. Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \;\neq\; \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$