Université de Rennes | Année 2023-2024
ISTIC | Analyse 1 (Licence 1)

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

(a) $z_1 = (2+i)^4$**Solution**$= ((2+i)^2)^2 = (3+4i)^2 = -7+24i$; (b) $z_2 = \dfrac{1-3i}{1-i} - \dfrac{5-5i}{1+2i}$

Solution $z_2 = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{(5-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-2i}{2} - \frac{-5-15i}{5} = 2-i-(-1-3i) = 3+2i$

Exercice 1.2. Donner la forme exponentielle de

(a) $z = 1 - i\sqrt{3}$**Solution**$= 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$; (b) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**Solution**$= e^{i\frac{2\pi}{3}}$; (c) $z = -\sqrt{3} + 3i$

Solution$= 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

Exercice 1.3. (a) Donner le module et un argument de $1+i$. **Solution** module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$
(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$. **Solution** module $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$, argument $\frac{5\pi}{4}$
(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$. **Solution** $4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4-4i$
(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$? **Solution** Puisque $(\overline{z})^5 = \overline{(z^5)}$, réponse $-4+4i$

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

(a) $(4+4i)^2$; (b) $(4+4i)(1-i\sqrt{3})$; (c) $\dfrac{2}{1-i}$; (d) $\dfrac{(1+i)^{19}}{(-1+i)^{11}}$

Solution (a) $= (4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = 32e^{i\frac{\pi}{2}} (= 32i)$ (b) $= 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
(c) $= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-(-i\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ (d) $= \sqrt{2}^{19-11} e^{i\cdot 19\frac{\pi}{4} - i\cdot 11\cdot\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}^8 e^{-i\cdot\frac{14\pi}{4}} = 2^4 \cdot e^{-i\frac{7\pi}{2}} = 16 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 16i$

Exercice 1.5. Nous connaissons déjà quelques valeurs remarquables de cos et sin, notamment

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}$$

Dans cet exercice on va allonger cette liste.
(a) Déterminer la forme exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.**Solution** $= e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
(b) Déterminer la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.**Solution** $(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(c) Déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **Solution** $\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}) = e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe les points M_k, d'affixe z_k tel que

(a) $z_1 = -2$, (b) $z_2 = 5i$, (c) $z_3 = 2+2i$, (d) $z_4 = 2-2i$, (e) $z_5 = -2-2i$,

et en déduire la forme trigonométrique/exponentielle de z_k, pour tout $k = 1, \ldots, 5$. **Solution** Formes exponentielles (a) $z_1 = 2e^{i\pi}$, (b) $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$, (c) $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, (d) $z_4 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ou $z_4 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ (les deux sont correctes)

Exercice 1.7. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

(e) $|z - (3+i)| = 2$ (f) $|z - (1+i)| = |z - 2i|$

Solution (a) Le cercle de centre 0 et de rayon 2 (b) La droite verticale qui coupe le point -1 (c) L'arc du cercle de centre 0 et de rayon 2 avec argument $\in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (d) On regarde le cercle de centre 0 et de rayon 2, et on regarde la droite horizontale traversant le point i. Leur intersection a deux points : $i \pm \sqrt{3}$ (e) Cercle de rayon 2 autour de $3+i$. (f) La médiatrice de $1+i$ et $2i$ (qui traverse par exemple les points i et $1+2i$.

Exercice 1.8. Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $-z$, iz, $\frac{1}{z}$. **Solution** $2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\frac{1}{z}$. **Solution** [...]

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ? **Solution** $|z| = |\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ implique $|z| = 1$, c.à.d. z doit être sur le cercle de rayon 1. Au même temps, $|z - 0| = |z - 1|$ implique que z se situe sur la médiatrice du segment [0,1]. Solution : $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 1.10. Décrire avec des mots français les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suivantes.

(a) $f(z) = \overline{z}$ (b) $f(z) = z + 2 + i$ (c) $f(z) = 2z$ (d) $f(z) = iz$ (e) $f(z) = (1+i)z$

Solution (a) Symétrie dans l'axe réel (b) Translation 2 vers la droite et 1 vers le haut (c) Dilatation/homothétie/expansion par un facteur 2, avec point fixe l'origine (d) Rotation par 90 degrés autour de l'origine (e) Rotation par 45 degrés, et dilatation par un facteur $\sqrt{2}$. (Les deux opérations peuvent être échangées - elles commutent)

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\sin^3(x)$; (b) $\cos^2(3x) \cdot \sin(5x)$.

Solution On cherche une expression de la forme $b_0 + b_1\cos(x) + c_1\sin(x) + b_2\cos(2x) + c_2\sin(2x) + b_3\cos(3x) + c_3\sin(3x) + \ldots$. On ne veut *pas* de produit $\sin(nx)\cdot\sin(mx)$ ou $\sin(nx)\cdot\cos(mx)$ ou $\cos(nx)\cdot\cos(mx)$!

(a) Rappel : $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. En utilisant cette formule,
$\sin^3 x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3 = (\frac{1}{2i})^3\left((e^{ix})^3) - 3(e^{ix})^2e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3\right)$
$= (\frac{1}{2i})^3\left(e^{i\cdot 3x} - e^{-i\cdot 3x} - 3e^{i\cdot 2x - i\cdot x} + 3e^{i\cdot x - i\cdot 2x}\right) = (\frac{1}{2i})^2\left(\frac{e^{i\cdot 3x}-e^{-i\cdot 3x}}{2i} - 3\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$
$= (-\frac{1}{4})\cdot(\sin(3x) - 3\sin(x))$,
(b) $\cos^2(3x)\sin(5x) = (\frac{1}{2})^2\frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot 3x}+e^{-i\cdot 3x}\right)^2\left(e^{i\cdot 5x}-e^{-i\cdot 5x}\right) =$
$= \frac{1}{4}\frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot 6x} + 2\cdot e^{i\cdot 0x} + e^{-i\cdot 6x}\right)\left(e^{i\cdot 5x} - e^{-i\cdot 5x}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot 11x} - e^{ix} + 2e^{i\cdot 5x} - 2e^{-i\cdot 5x} + e^{-ix} - e^{-i\cdot 11x}\right)$
$= \frac{1}{4}\left(\sin(11x) + 2\sin(5x) - \sin(x)\right)$

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z = 1+i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :
(a) sous forme algébrique ; **Solution** Si $(\alpha+i\beta)^2 = 1+i\sqrt{3}$, alors

$$\alpha^2-\beta^2 = 1\ (*) \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = \sqrt{3}\ (**) \quad \text{et} \quad \alpha^2+\beta^2 = |1+i\sqrt{3}| = 2\ (***)$$

La somme $(*)+(***)$ donne : $2\alpha^2 = 1+2 = 3$, et donc $\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ensuite, $(**)$ dit : si $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, alors $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et si $\alpha = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, alors $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On déduit $\alpha+i\beta = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z. **Solution** $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc les racines carrées de z sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $-11+60i$ (b) $1+4\sqrt{5}i$

Solution (a) $\alpha^2-\beta^2 = -11, 2\alpha\beta = 60, \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{(-11)^2+60^2} = 61$. Ceci implique $2\alpha^2 = -11+61 = 50$, et donc $\alpha = \pm 5$, et $\beta = \frac{60}{2\alpha}$. Racines $\pm(5+6i)$ (b) Racines$\pm(\sqrt{5}+2i)$;

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $(z-2-i)(z-3+i) = 0$; (b) $2z^2-6z+5 = 0$;
(c) $z^2-(3+4i)z-1+5i = 0$; (d) $z^2+(2+i)z-1+7i = 0$ (Rappel : $\sqrt{625} = 25$) ;

Solution (a) $z = 2+i$ et $z = 3-i$; (b) $\Delta = -4$, les racines de Δ sont $\pm 2i$, et $z = \frac{3}{2}\pm\frac{i}{2}$;
(c) $\Delta = -3+4i$, les racines de Δ sont $\pm(1+2i)$, et $z = \frac{3}{2}+2i\pm(\frac{1}{2}+i) = 2+3i$ ou $1+i$; (d) $\Delta = 7-24i$, les racines de Δ sont $\pm(4-3i)$, et $z = -1-\frac{i}{2}\pm(2-i\cdot\frac{3}{2}) = 1-2i$ ou $-3+i$

Calcul de racines n-ièmes de l'unité

Exercice 1.15. Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.
(a) Écrire les racines 3-èmes de l'unité à l'aide de ω_3 et les placer sur un dessin.
(b) Écrire les racines 4-èmes de l'unité à l'aide de ω_4 et les placer sur un dessin.

Exercice 1.16. Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(a) Lister les racines de l'unité à l'aide de ω.

(b) Calculer :

$$(1-\omega)\sum_{k=1}^{n}\omega^k.$$

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\omega^k = 0$.

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.17. Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$ et représentez-les dans le plan complexe. **Solution** $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\cdot 3\pi/4}$, $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\cdot 17\pi/12}$, [Dessin]

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe. **Solution** $\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/8}$, $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 5\pi/8}$, $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 9\pi/8}$, $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 13\pi/8}$, [Dessin]

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ et représentez-les dans le plan complexe. **Solution** Une racine $\sqrt[12]{2}\cdot e^{-7i\pi/72}$, autres exposants $17i\pi/72, 41i\pi/72, 65i\pi/72, 89i\pi/72, 113i\pi/72$, [Dessin]

Exercice 1.18. (Détermination des racines n-ièmes de -1.)
Soit $n \geqslant 2$, on note $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Soit z tel que $z^n = -1$.

(a) Montrer que z est une racine $2n$-ième de l'unité qui n'est pas une racine n-ièmes.

(b) Lister les racines n-ièmes de -1 à l'aide α et les placer sur un dessin pour $n = 2,3,4,\ldots$

Applications en électronique

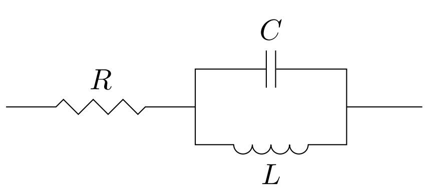

Figure 1

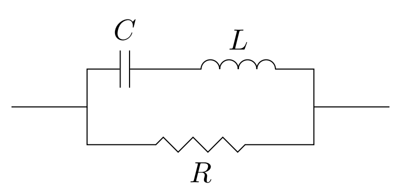

Figure 2

Exercice 1.19. L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où ω s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici R désigne une résistance, C un condensateur et L une bobine.

- Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance Z_A et Z_B, et je veux calculer l'impédance totale Z du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent

$$Z = Z_A + Z_B.$$

En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$

- L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où C est la capacité (en Farad) du condensateur.
- L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où L est l'inductance (en Henry) de la bobine.
- L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où R est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R + i\frac{L\omega}{1-LC\omega^2}$ **Solution**

$$Z_{circuit} = R + \frac{1}{\frac{1}{iL\omega} + \frac{1}{\frac{1}{iC\omega}}} = R + \frac{1}{\frac{1}{iL\omega} + iC\omega} = R + i\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Remarquez que $\lim_{\omega\to+\infty} Z_{circuit} = \lim_{\omega\to 0^+} Z_{circuit} = R$.

(b) Pour quelle pulsation ω le courant I est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est "infiniment grand".) **Solution** $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Donc la *fréquence* critique est $\frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$.

Exercice 1.20. Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$. **Solution**

$$Z_{circuit} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{iC\omega}+iL\omega} + \frac{1}{R}} = \dots$$

De nouveau, $\lim_{\omega\to+\infty} Z_{circuit} = \lim_{\omega\to 0^+} Z_{circuit} = R$.

(b) Pour quelle pulsation ω l'impédance est-elle nulle ? **Solution** De nouveau, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, et la fréquence est $\frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$.

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.21. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.22. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.23. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.24. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 2$. (b) $\dfrac{1}{2} \leqslant |z-i| \leqslant 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.25. Linériser $\cos^2(x) \cdot \sin^4(x)$.

Équations du second degré

Exercice 1.26. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$ (b) $z^4 + z^2 - 20 = 0$ (c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.27. Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.28. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.29. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.30. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ? **Solution** Soit $z = a + ib$. Alors Z est réel ssi $a = \frac{3}{4}$ ou $b = 0$.