Université de Rennes
ISTIC

Année 2023-2024
Analyse 1 (Licence 1)

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

$$\text{(a)}\ z_1 = (2+i)^4; \qquad \text{(b)}\ z_2 = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{5-5i}{1+2i}$$

Exercice 1.2. Donner la forme exponentielle de

$$\text{(a)}\ z = 1 - i\sqrt{3}; \quad \text{(b)}\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(c)}\ z = -\sqrt{3} + 3i;$$

Exercice 1.3. (a) Donner le module et un argument de $1+i$.
(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.
(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.
(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$?

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

$$\text{(a)}\ (4+4i)^2; \qquad \text{(b)}\ (4+4i)(1-i\sqrt{3}); \qquad \text{(c)}\ \frac{2}{1-i}; \qquad \text{(d)}\ \frac{(1+i)^{19}}{(-1+i)^{11}}$$

Exercice 1.5. Nous connaissons déjà quelques valeurs remarquables de cos et sin, notamment

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}$$

Dans cet exercice on va allonger cette liste.
(a) Déterminer la forme exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.
(b) Déterminer la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.
(c) Déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe les points M_k, d'affixe z_k tel que
(a) $z_1 = -2$, (b) $z_2 = 5i$, (c) $z_3 = 2+2i$, (d) $z_4 = 2-2i$, (e) $z_5 = -2-2i$,
et en déduire la forme trigonométrique/exponentielle de z_k, pour tout $k = 1, \dots, 5$.

Exercice 1.7. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

(e) $|z-(3+i)|=2$ (f) $|z-(1+i)|=|z-2i|$

Exercice 1.8. Soit $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $-z$, iz, $\frac{1}{z}$.
(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\frac{1}{z}$.

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 1.10. Décrire avec des mots français les applications $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ suivantes.

(a) $f(z)=\overline{z}$ (b) $f(z)=z+2+i$ (c) $f(z)=2z$ (d) $f(z)=iz$ (e) $f(z)=(1+i)z$

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\sin^3(x)$; (b) $\cos^2(3x)\cdot\sin(5x)$.

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z=1+i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :
(a) sous forme algébrique ;
(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z.

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $-11+60i$ (b) $1+4\sqrt{5}i$

;

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $(z-2-i)(z-3+i)=0$; (b) $2z^2-6z+5=0$;
(c) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$; (d) $z^2+(2+i)z-1+7i=0$ (Rappel : $\sqrt{625}=25$) ;

Calcul de racines n-ièmes de l'unité

Exercice 1.15. Soit $n\geqslant 2$. On note $\omega_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$.
(a) Écrire les racines 3-èmes de l'unité à l'aide de ω_3 et les placer sur un dessin.
(b) Écrire les racines 4-èmes de l'unité à l'aide de ω_4 et les placer sur un dessin.

Exercice 1.16. Soit $n\geqslant 2$. On note $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$.
(a) Lister les racines de l'unité à l'aide de ω.
(b) Calculer :

$$(1-\omega)\sum_{k=1}^{n}\omega^k.$$

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\omega^k=0$.

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.17. Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ et représentez-les dans le plan complexe.

Exercice 1.18. (Détermination des racines n-ièmes de -1.)
Soit $n \geqslant 2$, on note $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Soit z tel que $z^n = -1$.

(a) Montrer que z est une racine $2n$-ième de l'unité qui n'est pas une racine n-ièmes.

(b) Lister les racines n-ièmes de -1 à l'aide α et les placer sur un dessin pour $n = 2,3,4,\ldots$

Applications en électronique

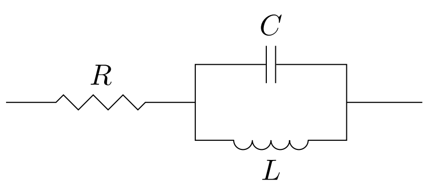

Figure 1

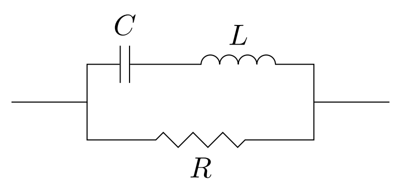

Figure 2

Exercice 1.19. L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où ω s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici R désigne une résistance, C un condensateur et L une bobine.

- Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance Z_A et Z_B, et je veux calculer l'impédance totale Z du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent
$$Z = Z_A + Z_B.$$
En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$
- L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où C est la capacité (en Farad) du condensateur.
- L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où L est l'inductance (en Henry) de la bobine.
- L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où R est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R + i\frac{L\omega}{1-LC\omega^2}$

(b) Pour quelle pulsation ω le courant I est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est “infiniment grand”.)

Exercice 1.20. Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$.

(b) Pour quelle pulsation ω l'impédance est-elle nulle ?

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.21. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.22. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.23. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.24. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 2$. (b) $\frac{1}{2} \leqslant |z-i| \leqslant 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.25. Linériser $\cos^2(x) \cdot \sin^4(x)$.

Équations du second degré

Exercice 1.26. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$ (b) $z^4 + z^2 - 20 = 0$ (c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.27. Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.28. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.29. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.30. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?