Probabilités

TD sur le chapitre 7

7 Indépendance et couple de variables aléatoires

Exercice 7.1

Les deux côtés une pièce sont marqués “0” et “1”. On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$M((i,j)) = \min(i,j) \quad \text{et} \quad S((i,j)) = i+j$$

Quelle est leur covariance ?

Exercice 7.2

Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$, indépendantes. On définit les variables aléatoires $S = X+Y$ et $D = X-Y$.

1. Les variables S et D, sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(S,D)$.

Exercice 7.3

Soient $X : \Omega \to \{0,2,4\}$ et $Y : \Omega \to \{0,1,2,3\}$ deux variables aléatoires. Supposons que les probabilités $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

1. Vérifier que le tableau défini bien une probabilité.
2. Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y, sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.4

On jette deux dés. Soient X et Y respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs obtenues.

1. Calculer pour tout $j = 1,2,\ldots,6$, la probabilité de $(Y = j)$, sachant que $(X = i)$, pour $i = 1,2,\ldots,6$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la loi de $X+Y$ si

1. $X \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$ (lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2). *Indication :* $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. $X \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n_2, p)$. *Indications :* $X+Y$ suit également une loi binomiale : $X+Y \sim \mathscr{B}(n_1+n_2, p)$. Vous avez le droit d'admettre la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Exercice 7.6 (Annales 2021)

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$, on suppose de plus que les probabilités que $(X,Y) = (i,j)$ sont données dans le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2	3
-1	1/36	2/36	4/36	1/36
0	4/36	1/36	6/36	1/36
1	5/36	6/36	4/36	1/36

1. Vérifier que le tableau défini bien une probabilité.
2. Donner la loi de X et son espérance.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. Calculer $\mathbb{P}(X=1|Y=0)$, autrement dit calculer la probabilité de l'événement $\{X=1\}$ sachant l'événement $\{Y=0\}$.

$$\mathbb{P}(X=1|Y=0)=\frac{\mathbb{P}(X=1,Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)}=\frac{1/36}{12/36}=1/12.$$

5. Est-ce que les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=0\}$ sont indépendants ?
6. Calculer la covariance du couple (X,Y).
7. Calculer $\mathbb{P}(X+Y=2)$

Exercice 7.7

On considère le couple de variables aléatoires conjointement continues $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f(x,y)=cy\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité.
2. Calculer la densité de X.
3. Calculer la densité de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.8

On considère le couple de variables aléatoires conjointement continues $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f(x,y)=(x+y)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la densité de X.
3. Calculer la densité de Y.

Exercice 7.9

On considère T le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. On considère le couple de variables aléatoires conjointement continues $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f(x,y)=c\mathbb{1}_T(x,y)$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité.
2. Calculer la densité de X.
3. Calculer la densité de Y.

Exercice 7.10

On considère le couple de variables aléatoires conjointement continues $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f(x,y)=ce^{-2x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,e^x]}(y)$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité.
2. Calculer la densité de X.
3. Calculer la densité de Y.