Probabilités

TD sur les chapitres 5 à 8

5 Espérance et variance

Exercice 5.1

On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5.2

On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir “pile”. On s'arrête la première fois où on obtient “pile”. On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois qu'on a obtenu “face”. On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 5.3

Soit X une variable aléatoire discrète. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ?

Exercice 5.4

Une pièce de monnaie porte sur une face l'inscription “17” et de l'autre face “20”. (Ceci peut être modélisé par une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = 17) = 0,5$ et $\mathbb{P}(X = 20) = 0,5$.) Trouver l'espérance et la variance. Indication : comparer avec la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1, \frac{1}{2})$

Exercice 5.5

Soit X une variable aléatoire. On appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $\mathbb{V}(X^*)$.

Exercice 5.6

Soir X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5$. Calculer $\mathbb{E}((2+X)^2)$ et $\mathbb{V}(4+3X)$.

Exercice 5.7

On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de X, son espérance, sa variance, et son écart-type.

Exercice 5.8

Toujours avec un jeu de 32 cartes, on effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant à chaque fois la carte tirée.

1. Soit Y, le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Soit Z, le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier roi. Donner, sans calcul, la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 5.9

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale d'espérance 6 et de variance 2,4 trouver $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 5.10

Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note X le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$.

Exercice 5.11

Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble E à n éléments. On tire un papier au hasard. Soit X, la variable aléatoire égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X, et donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

TSVP →

Exercice 5.12

On joue à pile ou face avec une pièce vérifiant $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$, et $\mathbb{P}(\text{face}) = 1-p$. On effectue des lancers successifs. Soit X, la variable aléatoire égale au rang de la 2^{eme} apparition de pile. Trouver la loi de X. Trouver l'espérance (difficile) et la variance (encore plus difficile) de X.

Exercice 5.13 (Annales 2021)

Léa décide d'inviter des personnes à sa fête d'anniversaire. Elle lance les invitations via les réseaux sociaux et reçoit 117 réponses positives. Malheureusement, la salle qu'elle avait prévu de louer ne peut accueillir que 100 invités pour des raisons de sécurité. Elle estime qu'une personne ayant répondu oui à son invitation a 10% de chance de ne pas venir finalement.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'invités présents à l'anniversaire de Léa.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Quelle est la probabilité que Léa doive changer de salle ? *(On donnera la réponse sous la forme d'une formule).*

Exercice 5.14 (Annales 2021)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

1. Rappeler la définition de la loi de Poisson.
2. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 3X - 5$.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = \frac{1}{1+X}$.

Exercice 5.15 (Annales 2021)

On considère une urne contenant trois boules une bleue, une rouge et une verte. On effectue n tirages avec remise. On note X_b le nombre de boules bleues tirées pendant ses n tirages, X_r le nombre de boules rouges tirées pendant ses n tirages et X_v le nombre de boules vertes tirées pendant ses n tirages.

1. Soient $n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$. Soit S une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre (n,p). Démontrer avec soin que $\mathbb{E}(S) = np$ et $\mathbb{V}(S) = np(1-p)$.
2. Donner la loi de X_b, X_r et X_v.
3. Calculer la variance de X_b, X_r et X_v.
4. Calculer la variance de $X_b + X_r$. *On pourra utiliser une relation entre X_b, X_r et X_v.*
5. En déduire, la covariance du couple (X_b, X_r).

6 Variables aléatoires continues

Exercice 6.1

Le nombre de minutes qu'un joueur de base-ball particulier passe sur le terrain suit la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 0{,}025 & \text{si } 10 \leqslant x < 20 \\ 0{,}05 & \text{si } 20 \leqslant x < 30 \\ 0{,}025 & \text{si } 30 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que ce joueur soit actif :

1. plus de 15 minutes.
2. entre 20 et 35 minutes.
3. moins de 30 minutes.

Exercice 6.2

Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = c \cdot x^4 \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, et la médiane.

Exercice 6.3

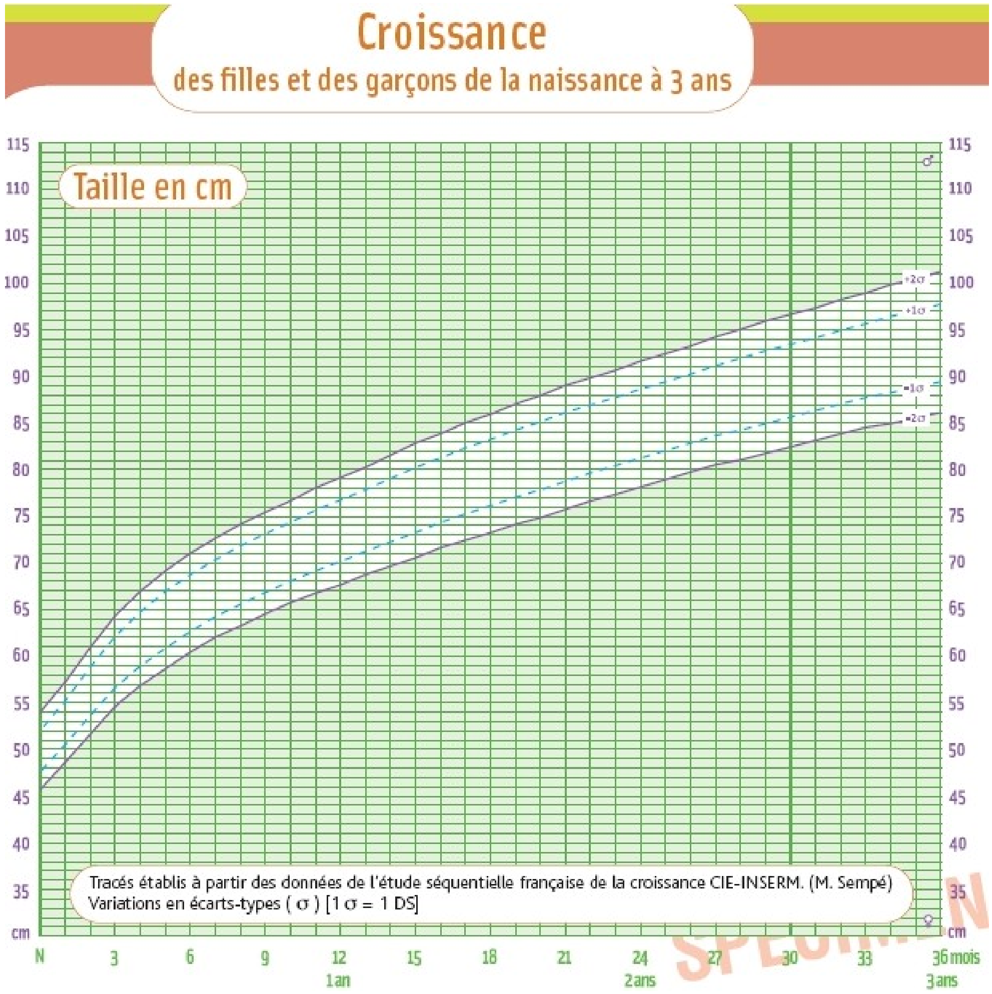
La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle X, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}e^{-x/100} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{100}e^{-x/100}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

Quelle est la médiane de X ? Autrement qu'elle est la médiane de la durée de vie (aussi appelée demi-vie) ?

Exercice 6.4

1. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Rappellons que nous notons $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition de cette loi. Sachant que $\Phi(-1) = 0,15866\ldots$, $\Phi(0) = 0,5$ et $\Phi(1) = 0,84134$, déterminer la probabilité
$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$
2. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Déterminer la probabilité
$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma]).$$



Exercice 6.5

Un nombre est choisi au hasard, selon la loi uniforme, sur le segment $[0,1]$. Trouver la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 6.6

Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0,N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0,N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

1. Pour tout $t \in [0,N]$, calculer $\mathbb{P}(X_N > t)$.
2. En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N.
3. Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. *Indication* : on admet la formule $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x$.
4. Donner un sens exact à la phrase “Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$”.

Exercice 6.7

Supposons que vous avez à votre disposition un générateur de nombres aléatoires, qui engendre des nombres réels selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Vous souhaitez engendrer des nombres aléatoires, mais pas selon la loi uniforme $\mathscr{U}(0,1)$ mais selon une certaine loi dont vous connaissez la fonction de répartition $F(t)$. Supposons que cette fonction est continue et strictement croissante, de sorte qu'il y a une fonction inverse G – ça veut dire que

$$F(t) = u \quad \Leftrightarrow \quad t = G(u)$$

ou encore $F(G(u)) = u$ pour tout u.

1. Choisissons Y avec notre générateur, selon la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{P}(G(Y) \leqslant t) \ = \ F(t)$.
2. Donc en pratique, que doit-on faire pour engendrer une v.a. dont la fonction de répartition est F ?
3. Par exemple, expliquez comment engendrer des nombres aléatoires selon une loi expenentielle $\mathscr{E}(1)$ si l'on n'a qu'un générateur de loi $\mathscr{U}(0,1)$.

Exercice 6.8

Un poste à incendie doit être installé le long une route forestière de longueur A ($A \in \mathbb{R}$).

1. Si les incendies se déclarent en des points uniformément réparties sur $[0,A]$, où doit-on placer ce poste de façon à minimiser l'espérance entre le poste et l'incendie ?
2. Supposons que la route soit infiniment longue, s'étendant de 0 à l'infini $+\infty$. Si la distance entre un incendie et l'origine est exponentiellement distribué selon une loi $\mathscr{E}(1)$, où doit-on installer le poste à incendie ?

Exercice 6.9

Soit X une variable aléatoire qui est distribué selon la loi exponentielle de paramètre 1, c.à.d., $X \sim \mathscr{E}(1)$. Montrer que X est “sans mémoire", au sens suivant : si $K > 0$ et $k > 0$ alors

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

Exercice 6.10 (Annales 2021)

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire continue de densité donnée par la fonction

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = cx(1-x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.
4. Estimer la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$ à l'aide l'inégalité de Markov.
5. Calculer la valeur exacte de $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$.

Exercice 6.11 (Annales 2021)

La durée de vie X d'un composant électronique, exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ. On admet qu'en moyenne, un composant a une durée de vie de 8 années.

1. Rappeler pourquoi, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad \text{pour un certain } \lambda > 0.$$

2. Expliquer pourquoi $\lambda = 1/8$.
3. Déterminer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
4. Déterminer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 7 ans.

   Une machine est composée de deux composants A et B identiques à celui des questions précédentes et indépendants entre eux. La machine tombe en panne dès que l'un des deux composants cesse de fonctionner.

5. Exprimer la durée de vie Y de la machine en fonction des durées de vie X_A et X_B des composants A et B.
6. Déterminer la probabilité que la machine ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

7 Indépendance de variales aléatoires

Exercice 7.1

Les deux côtés une pièce sont marqués "0" et "1". On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$M((i,j)) = \min(i,j) \quad \text{et} \quad S((i,j)) = i + j$$

Quelle est leur covariance ?

Exercice 7.2

Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$, indépendantes. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Les variables S et D, sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$.

Exercice 7.3

Soient $X : \Omega \to \{0,2,4\}$ et $Y : \Omega \to \{0,1,2,3\}$ deux variables aléatoires. Supposons que les probabilités $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

1. Vérifier que le tableau défini bien une probabilité.
2. Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y, sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.4

On jette deux dés. Soient X et Y respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs obtenues.

1. Calculer pour tout $j = 1, 2, \ldots, 6$, la probabilité de $(Y = j)$, sachant que $(X = i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, 6$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la loi de $X + Y$ si

1. $X \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$ (lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2). *Indication :* $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. $X \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n_2, p)$. *Indications :* $X + Y$ suit également une loi binomiale : $X + Y \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$. Vous avez le droit d'admettre la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Exercice 7.6 (Annales 2021)

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$, on suppose de plus que les probabilités que $(X,Y) = (i,j)$ sont données dans le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2	3
-1	$1/36$	$2/36$	$4/36$	$1/36$
0	$4/36$	$1/36$	$6/36$	$1/36$
1	$5/36$	$6/36$	$4/36$	$1/36$

1. Vérifier que le tableau défini bien une probabilité.
2. Donner la loi de X et son espérance.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. Calculer $\mathbb{P}(X = 1 | Y = 0)$, autrement dit calculer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$ sachant l'événement $\{Y = 0\}$.

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{1/36}{12/36} = 1/12.$$

5. Est-ce que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 0\}$ sont indépendants ?
6. Calculer la covariance du couple (X, Y).
7. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = 2)$

8 Loi des grands nombres et théorème central limite

Exercice 8.1

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Trouver une borne supérieure sur la probabilité que la production de la semaine prochaine soit d'au moins 75 pièces.
2. * Y a-t-il une borne sur la probabilité que la production soit inférieure à 30 pièces ?
3. On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit strictement comprise entre 40 et 60 pièces ?

Exercice 8.2

On considère une variable aléatoire continue X obéissant a la loi uniforme sur l'intervalle $[0,10]$.

1. Calculer son espérance et sa variance. .
2. Majorer la quantité $\mathbb{P}(|X-5| \geqslant 5)$ grace à l'inégalité de Tchebychev. Que vaut en fait cette probabilité ?

Exercice 8.3

Si $\mathbb{E}(X)=75$, $\mathbb{E}(Y)=75$, $\mathbb{V}(X)=10$, $\mathbb{V}(Y)=12$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)=-3$, chercher une borne supérieure à $\mathbb{P}(|X-Y| \geqslant 15)$.

Exercice 8.4

On lance cent fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Majorez, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face à l'issue de ces tirages.
2. À l'aide du théorème central limite, estimez la même probabilité.

Exercice 8.5

On lance un dé jusqu'à ce que la somme totale des nombres obtenus dépasse 300. Utiliser le théorème central limite pour estimer la probabilité qu'il faille au moins 80 jets.