Probabilités

TD sur les chapitres 1 à 4

1 Ensembles et dénombrements

Exercice 1.1

Dans l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{1,3,5\}, \quad C = \{3,4,5,6\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants :
1. $A \cup (B \cap C)$. **2**. $(A \cup B) \cap C$. **3**. $(A \cup B)^c$. **4**. $A \setminus B$. **5**. $A \cap B \cap C$. **6**. $A \Delta B$.

Exercice 1.2

Trouver un exemple d'ensembles E, F, G tels que $(E \setminus F) \setminus G \neq E \setminus (F \setminus G)$.

Exercice 1.3

Soit Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Supposons $\text{Card}(A) = p$ et $\text{Card}(\Omega) = n$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω ?
2. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω disjoints de A ?
3. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω contenant A ?

Exercice 1.4

Combien de résultats possibles (en tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? Et combien de résultats contenant au moins un 6 ?

Exercice 1.5

On prend un jeu classique de 32 cartes (en particulier, il contient 16 cartes noires et 16 cartes rouges). On tire trois fois (sans remise). En tenant compte de l'ordre, combien de résultats possibles y a-t-il ? Et combien d'entre eux contiennent exactement une carte rouge ?

Exercice 1.6

On veut placer n convives autour d'une table circulaire avec n chaises. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque convive a le même voisin de gauche et le même voisin de droite.

Exercice 1.7 (Coefficients binomiaux)

Démontrer les formules suivantes :

1. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)
4. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
5. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. (Par exemple : $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$)

Exercice 1.8 (Probabilités au poker)

On prend un jeu de classique de 52 cartes. Dénombrer le nombre de mains, quinte-flushs, carrés, fulls, couleurs, suites, brelans, double-paires, paires. On rappelle :

- Paire : deux cartes de valeurs identiques.
- Double-paire : deux paires.
- Brelan : trois cartes de valeurs identiques.
- Suite : Les valeurs 5 cartes se suivent.
- Couleur : Les 5 cartes sont de la même couleur.
- Full : Un brelan et une paire.

 TSVP →

- Carré : Quatres cartes de valeurs identiques.
- Quinte-flush : Suite + couleur.

Exercice 1.9

Il y a 4 types de gâteaux dans une patisserie. De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ?

Exercice 1.10 (Annales 2021)

Parmi les 10 membres d'une association, on veut choisir un président, un secrétaire et un trésorier. Aucun membre ne peut avoir deux charges (autrement dit, le cumul est interdit). On rappelle que *le bureau* de l'association est le triplet formé par le président, le secrétaire et le trésorier. On dit qu'un membre de l'association *siège au bureau* lorsqu'il fait parti du bureau.

Pour simplifier la situation, on suppose que les dix membres s'appellent $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. De combien de manières peut-on attribuer ses charges, autrement dit combien de bureau peut-on former ?

On justifiera ses réponses par des phrases et on donnera le résultat sous la forme de somme et / ou produit d'entiers, sans chercher à calculer la valeur exacte. Par exemple $2 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 6$ *est une forme de résultat acceptable lorsqu'il est accompagné d'une phrase.*

1. Si aucune restriction n'est imposée ?
2. Si A et B refusent sieger ensemble ?
3. Si C et D siègent ensemble ou pas du tout ?
4. Si E doit avoir une charge ?
5. Si F prend la charge de président ou rien du tout ?

2 Espaces probabilisés

Exercice 2.1

On considère un jeu avec 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains de 4 cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de 4 cartes contenant exactement deux rois ?
3. Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ?

Exercice 2.2

Une urne contient 2 boules rouges et 5 noires. Les joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule, sans remise, jusqu'à ce qu'une boule rouge sorte (A commence). Quelle est la probabilité que ce soit A qui tire la première boule rouge ?

Exercice 2.3

Dans une loterie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les $\binom{40}{8}$ combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait :

1. les 8 bons nombres ?
2. 7 parmi les 8 bons nombres ?
3. aucun bon nombre ?

Exercice 2.4

De combien de manières peut-on mettre 8 personnes autour d'une table ronde avec 8 places ?

1. Si aucune restriction n'est mise en place.
2. S'il y a une famille de 3 qui doit être assis ensemble.
3. Si on place les 8 invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille est assise ensemble par pure chance ?

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

Exercice 3.1

Pour une famille avec exactement deux enfants, calculer les probabilités suivantes.

1. Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?
2. Sachant que l'ainée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

Exercice 3.2 (Indépendance multiple)

Commençons avec une définition : trois événements A, B, C sont dits *deux à deux indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \text{ et } \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Ils sont dits *mutuellement indépendants* si

$$\text{ils sont deux à deux indépendants et en plus } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Soit $\Omega = \{\text{familles avec deux enfants}\}$. Considérons les trois événéments $A =$"la fratrie est mixte", $B =$"l'enfant ainé est une fille", $C =$"le cadet est un garçon".

1. Montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3.3

Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

1. On tire un individu au hasard dans la population, on lui fait passer le test, le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?
2. À première vue, le résultat obtenu en 1. est extrêmement surprenant ! Expliquez-le en quelques phrases françaises.

Exercice 3.4

A quelle condition deux événements incompatibles sont-ils indépendants ?

Exercice 3.5

On considère trois pièces : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une pièce au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Exercice 3.6

Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Tu es sûr à 90 % que ton voisin l'arrosera.

1. Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour ?
2. Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser ?

Exercice 3.7

Soit n un entier positif. On considère n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$; ces individus mentent avec probabilité $p (0 < p < 1)$, et leurs comportements sont indépendants. Une information (sous forme de oui ou non) est donnée à I_1 qui la transmet à I_2, ... qui la transmet à I_n, qui l'annonce au monde. Quelle est la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise, c.à.d. que l'annonce de I_n coincide avec l'information donnée à I_1 ? Montrer que $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.8 (Le jeu des trois portes)

Le jeu des trois portes était un jeu télévisé populaire (Let's make a deal) diffusé dans les années 1970 aux états-Unis. Le joueur est placé devant 3 portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture que le joueur peut gagner. Derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur connait la position de la voiture. Le joueur doit d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui est ni celle choisie par le candidat, ni celle qui cache la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte initialement choisie, ou bien de changer son choix vers la troisième porte.

1. Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il garde son choix initial ?
2. Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il choisit la troisième porte ?

Exercice 3.9 (La probabilité conditionnelle est bien une probabilité)

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω et $B \subset \Omega$ un événement avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que la fonction qui à l'événement A associe le nombre $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 3.10 (Difficile)

Dans une voiture de TGV toutes les places sont vendues. La première personne qui arrive est un peu tête-en-l'air, et se met aléatoirement à une place (mais dans la bonne voiture). Chaque personne suivante qui arrive applique la règle suivante : si sa place est encore libre, elle se met sur sa place prévue, si sa place est déjà prise, elle se met aléatoirement sur une des places encore libres. Quelle est la probabilité que la dernière personne qui arrive pourra se mettre sur sa place prévue ? (Indication : cette question peut se faire sans aucun calcul et sans mentionner les probabilités conditionnelles. Or, pour avoir une idée, vous pouvez calculer les cas où une voiture de TGV n'a que 2, 3, ou 4 sièges.)

Exercice 3.11 (Annales 2021)

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Si le dé est pipé alors la probabilité d'obtenir un 6 vaut 1/2. Si le dé n'est pas pipé alors la probabilité d'obtenir un 6 vaut 1/6 (bien entendu). On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.

Soit $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers. On lance le dé tiré n fois. On note P l'événement "*le dé est pipé*" et S_k l'événement "*le résultat des k premiers lancers est* 6".

1. Calculer la probabilité d'avoir un 6 au premier lancer. Autrement dit, calculer $\mathbb{P}(S_1)$.
2. Calculer la probabilité d'avoir un 6 à chacun des n lancers. Autrement dit, calculer $\mathbb{P}(S_n)$.
3. Si on obtient 6 au premier lancer alors quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ? Autrement dit, calculer $\mathbb{P}(P|S_1)$.
4. Si on obtient 6 à chacun des n lancers alors quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ? Autrement dit, calculer $p_n := \mathbb{P}(P|S_n)$.
5. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3.12 (Annales 2021)

Un magasin M vend des jouets provenant de deux usines différentes, notées A et B. On suppose que l'usine A produit 60% de ces jouets et que l'usine B produit les 40% restants. La probabilité qu'un jouet construit par l'usine A soit défectueux est de 0.1 alors que la probabilité pour qu'un jouet construit par l'usine B soit défectueux est de 0.2.

1. Bob achète un jouet dans le magasin M, quelle est la probabilité que ce jouet soit défectueux ?
2. Le jouet de Bob est défecteux quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par l'usine A ?

4 Variables aléatoires discrètes

Exercice 4.1

Soit X une variable aléatoire donnée par :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 3.5\}$

x	0	1	2	3	3,5
$\mathbb{P}(X = x)$	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

Calculer et tracer la fonction de répartition de la v.a. X.

Exercice 4.2

On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 4.3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p – donc $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Démontrer que X est une "variable aléatoire sans mémoire" :

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

Indication : montrer d'abord que $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.

Exercice 4.4

Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Calculer la probabilité que, sur une page donnée, il y a au moins 3 erreurs.

Exercice 4.5

Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ donnée, quelle est la valeur de λ qui maximise $\mathbb{P}(X = k)$?