Exercices pour le cours de Probabilités - ISTIC
Chapitres 6, 7 et 8

6. Variables aléatoires continues

Exercice 6.1. Le nombre de minutes qu'un joueur de base-ball particulier passe sur le terrain suit la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 0,025 & \text{si } 10 \leqslant x < 20 \\ 0,05 & \text{si } 20 \leqslant x < 30 \\ 0,025 & \text{si } 30 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que ce joueur soit actif :

1. plus de 15 minutes.
2. entre 20 et 35 minutes.
3. moins de 30 minutes.

Exercice 6.2. Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, et la médiane.

Exercice 6.3. La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-x/100} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quelle est la médiane de la durée de vie (aussi appelée demi-vie) ?

Exercice 6.4. **1.** Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Rappellons que nous notons $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition de cette loi. Sachant que $\Phi(-1) = 0,15866\ldots$, $\Phi(0) = 0,5$ et $\Phi(1) = 0,84134$, déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

2. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Déterminer la probabilité

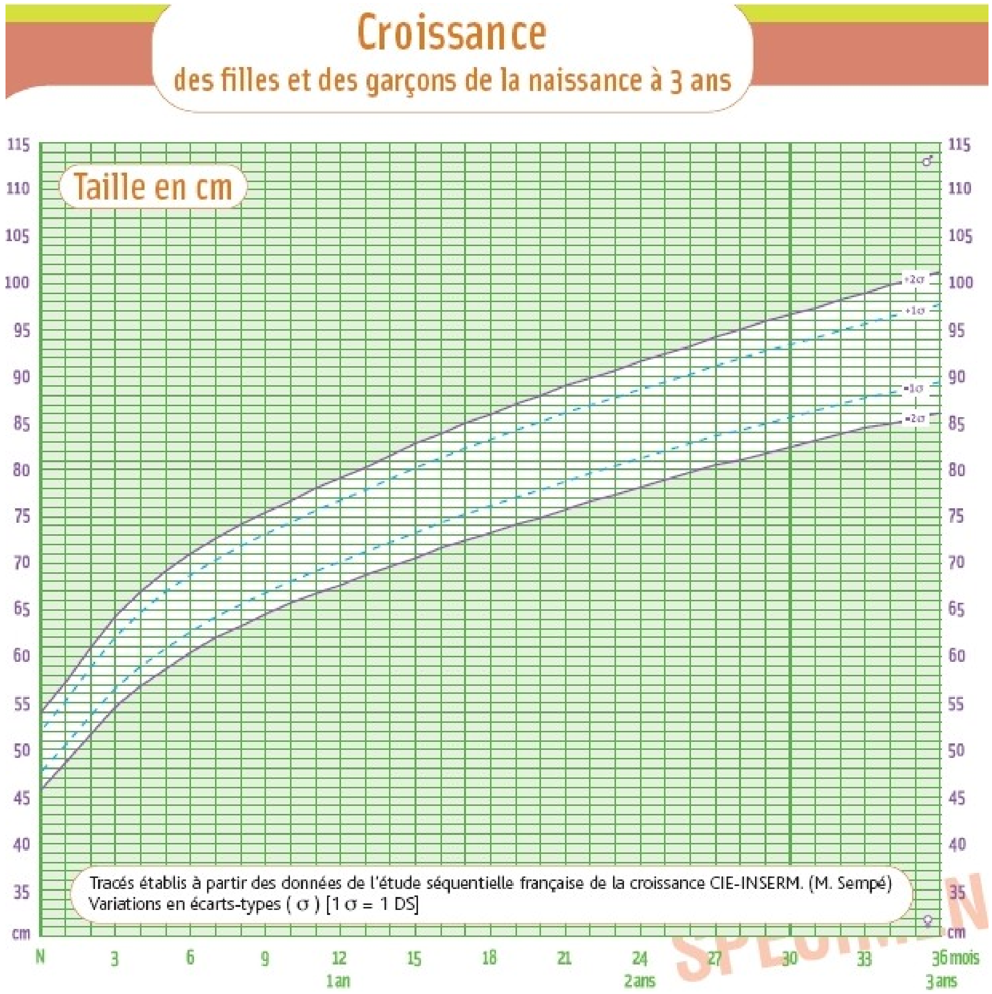
$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma]).$$

Exercice 6.5. Un nombre est choisi au hasard, selon la loi uniforme, sur le segment $[0,1]$. Trouver la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 6.6. Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0,N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0,N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

1. Pour tout $t \in [0,N]$, calculer $\mathbb{P}(X_N > t)$.
2. En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N.
3. Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. Indication : on admet la formule $\lim_{N\to\infty}(1 + \frac{x}{N})^N = e^x$.
4. Donner un sens exact à la phrase “Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$”.

Exercice 6.7. Supposons que vous avez à votre disposition un générateur de nombres aléatoires, qui engendre des nombres réels selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Vous souhaitez engendrer des nombres aléatoires, mais pas selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ mais selon une certaine loi dont vous connaissez la fonction de répartition



$F(t)$. Supposons que cette fonction est continue et strictement croissante, de sorte qu'il y a une fonction inverse G – ça veut dire que

$$F(t) = u \quad \Leftrightarrow \quad t = G(u)$$

ou encore $F(G(u)) = u$ pour tout u.

1. Choisissons Y avec notre générateur, selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $\mathbb{P}(G(Y) \leqslant t) = F(t)$.
2. Donc en pratique, que doit-on faire pour engendrer une v.a. dont la fonction de répartition est F ?
3. Par exemple, expliquez comment engendrer des nombres aléatoires selon une loi expenentielle $\mathcal{E}(1)$ si l'on n'a qu'un générateur de loi $\mathcal{U}(0, 1)$.

Exercice 6.8. Un poste à incendie doit être installé le long une route forestière de longueur A ($A \in \mathbb{R}$).

1. Si les incendies se déclarent en des points uniformément réparties sur $[0, A]$, où doit-on placer ce poste de façon à minimiser l'espérance entre le poste et l'incendie ?
2. (difficile) Supposons que la route soit infiniment longue, s'étendant de 0 à l'infini $+\infty$. Si la distance entre un incendie et l'origine est exponentiellement distribué selon une loi $\mathcal{E}(1)$, où doit-on installer le poste à incendie ?

Exercice 6.9. Soit X une variable aléatoire qui est distribué selon la loi exponentielle de paramètre 1, c.à.d., $X \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que X est "sans mémoire", au sens suivant : si $K > 0$ et $k > 0$ alors

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

7. Indépendance de variales aléatoires

Exercice 7.1. Les deux côtés une pièce sont marqués “0” et “1”. On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$M((i,j)) = \min(i,j) \quad \text{et} \quad S((i,j) = i+j$$

Quelle est leur covariance ?

Exercice 7.2. Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$, indépendantes. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Les variables S et D, sont-elles indépendantes?
2. Calculer $Cov(S,D)$.

Exercice 7.3. Soient $X\colon\ \Omega \to \{0,2,4\}$ et $Y\colon\ \Omega \to \{0,1,2,3\}$ deux variables aléatoires. Nous supposons que les probabilités $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$2/48$	$6/48$	$3/48$	$1/48$
2	$4/48$	$12/48$	$6/48$	$2/48$
4	$2/48$	$6/48$	$3/48$	$1/48$

1. Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y, sont-elles indépendantes?

Exercice 7.4. On jette deux dés. Soient X et Y respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs obtenues.

1. Calculer pour tout $j = 1,2,\dots,6$, la probabilité de $(Y = j)$, sachant que $(X = i)$, pour $i = 1,2,\dots,6$.
2. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 7.5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la loi de $X+Y$ si

1. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ (lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2). Indication : la réponse est que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.
2. $X \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2,p)$. Indications : la réponse est que $X+Y$ suit également une loi binomiale : $X+Y \sim \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. Vous avez le droit d'admettre la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

8. Loi des grands nombres et théorème central limite

Exercice 8.1. On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Trouver une borne supérieure sur la probabilité que la production de la semaine prochaine soit d'au moins 75 pièces.
2. * Y a-t-il une borne sur la probabilité que la production soit inférieure à 30 pièces ?
3. On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit strictement comprise entre 40 et 60 pièces?

Exercice 8.2. On considère une variable aléatoire continue X obéissant a la loi uniforme sur l'intervalle $[0,10]$.

1. Calculer son espérance et sa variance. .
2. Majorer la quantité $\mathbb{P}(|X-5| \geqslant 5)$ grace à l'inégalité de Tchebychev. Que vaut en fait cette probabilité?

Exercice 8.3. Si $\mathbb{E}(X) = 75$, $\mathbb{E}(Y) = 75$, $\mathbb{V}(X) = 10$, $\mathbb{V}(Y) = 12$ et $Cov(X,Y) = -3$, chercher des bornes supérieures à

1. $\mathbb{P}(|X-Y| \geqslant 15)$
2.* $\mathbb{P}(X \geqslant Y + 15)$
3.* $\mathbb{P}(Y \geqslant X + 15)$

Exercice 8.4. On lance cent fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Majorez, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face à l'issue de ces tirages.
2. À l'aide du théorème central limite, estimez la même probabilité.

Exercice 8.5. On lance un dé jusqu'à ce que la somme totale des nombres obtenus dépasse 300. Utiliser le théorème central limite pour estimer la probabilité qu'il faille au moins 80 jets.