Exercices pour le cours de Probabilités - ISTIC
Chapitre 4 et 5

4. Variables aléatoires discrètes

Exercice 4.1. La fonction de répartition d'une v.a. Y est la suivante:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0.6 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leqslant x < 3.5 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3,5 \end{cases}$$

Calculer la loi de probabilité de Y.

Exercice 4.2. On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 4.3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p – donc $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Démontrer que X est une "variable aléatoire sans mémoire" :

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

Indication : montrer d'abord que $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.

Exercice 4.4. Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Calculer la probabilité que, sur une page donnée, il y a au moins 3 erreurs.

Exercice 4.5. Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ donnée, quelle est la valeur de λ qui maximise $\mathbb{P}(X = k)$?

5. Espérance et variance

Exercice 5.1. On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5.2. On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir "pile". On s'arrête la première fois où on obtient "pile". On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois qu'on a obtenu "face". On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X?

Exercice 5.3. Soit X une variable aléatoire discrète. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ?

Exercice 5.4. Une pièce de monnaie porte sur une face l'inscription "17" et de l'autre face "20". (Ceci peut être modélisé par une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = 17) = 0,5$ et $\mathbb{P}(X = 20) = 0,5$.) Trouver l'espérance et la variance. Indication : comparer avec la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

Exercice 5.5. Soit X une variable aléatoire. On appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par:

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $\mathbb{V}(X^*)$.

Exercice 5.6. Soir X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5$. Calculer $\mathbb{E}((2+X)^2)$ et $\mathbb{V}(4+3X)$.

Exercice 5.7. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de X, son espérance, sa variance, et son écart-type.

Exercice 5.8. Toujours avec un jeu de 32 cartes, on effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant chaque fois la carte tirée.

1. Soit Y, le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Soit Z, le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier roi. Donner, sans calcul, la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 5.9. Pour une variable aléatoire X binomiale d'espérance 6 et de variance 2,4 trouver $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 5.10. Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note X le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$.

Exercice 5.11. Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble E à n éléments. On tire un papier au hasard. Soit X, la variable aléatoire égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X, et donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5.12. On joue au pile ou face avec une pièce avec $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$, et $\mathbb{P}(\text{face}) = 1 - p$. On effectue des lancers successifs. Soit X, la variable aléatoire égale au rang de la 2^{eme} apparition de pile. Trouver la loi de X. Trouver l'espérance (difficile) et la variance (encore plus difficile) de X.