Exercices pour le cours de Probabilités - ISTIC
Chapitre 1 à 3

1. Ensembles et dénombrements

Exercice 1.1. Dans l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{1,3,5\}, \quad C = \{3,4,5,6\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants :

- $A \cup (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cap C$
- $(A \cup B)^c$
- $A \backslash B$
- $A \cap B \cap C$
- $A \Delta B$

Exercice 1.2. Trouver un exemple d'ensembles E, F, G tels que $(E\backslash F)\backslash G \neq E\backslash(F\backslash G)$

Exercice 1.3. Soit Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Supposons $\mathrm{Card}(A) = p$ et $\mathrm{Card}(\Omega) = n$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω ?
2. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω disjoints de A ?
3. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω contenant A ?

Exercice 1.4. On veut placer n convives autour d'une table circulaire avec n chaises. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque convive a le même voisin de gauche et le même voisin de droite.

Exercice 1.5. Combien de résultats possibles (en tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? Et combien de résultats contenant au moins un 6 ?

Exercice 1.6. On prend un jeu classique de 32 cartes (en particulier, il contient 16 cartes noires et 16 cartes rouges). On tire trois fois (sans remise). En tenant compte de l'ordre, combien de résultats possibles y a-t-il ? Et combien d'entre eux contiennent exactement une carte rouge ?

Exercice 1.7. (Coefficients binomiaux) Démontrer les formules suivantes:

1. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)
4. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
5. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. (Par exemple : $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$)

Exercice 1.8. Il y a 4 types de gâteaux dans une patisserie. De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ?

2. Espaces probabilisés

Exercice 2.1. De combien de manières peut-on mettre 8 personnes autour d'une table ronde avec 8 places ?

1. Si aucune restriction n'est mise en place.
2. S'il y a une famille de 3 qui doit être assis ensemble.
3. Si on place les 8 invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille est assise ensemble par pure chance ?

Exercice 2.2. On considère un jeu avec 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains de 4 cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de 4 cartes contenant exactement deux rois ?
3. Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ?

Exercice 2.3. Une urne contient 2 boules rouges et 5 noires. Les joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule, sans remise, jusqu'à ce qu'une boule rouge sorte (A commence). Quelle est la probabilité que ce soit A qui tire la première boule rouge ?

Exercice 2.4. Dans une loterie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les $\binom{40}{8}$ combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait :

1. les 8 bons nombres ?
2. 7 parmi les 8 bons nombres ?
3. aucun bon nombre ?

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Exercice 3.1. (Démonstration que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω, et soit $B \subset \Omega$ un événement avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que la fonction qui à l'événement A associe le nombre $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 3.2. Pour une famille avec exactement deux enfants, calculer les probabilités suivantes.

(a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

(b) Sachant que l'ainée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

Exercice 3.3. (Indépendance multiple) Commençons avec une définition : trois événements A, B, C sont dits *deux à deux indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \text{ et } \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Ils sont dits *mutuellement indépendants* si

$$\text{ils sont deux à deux indépendants et en plus } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Soit $\Omega = \{\text{familles avec deux enfants}\}$. Considérons les trois événements $A =$“la fratrie est mixte”, $B =$“l'enfant ainé est une fille”, $C =$“le cadet est un garçon”.

1. Montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3.4. Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10\,000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

1. On tire un individu au hasard dans la population, on lui fait passer le test, le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?
2. À première vue, le résultat obtenu en 1. est extrêmement surprenant ! Expliquez-le en quelques phrases françaises.

Exercice 3.5. A quelle condition deux événements incompatibles sont-ils indépendants?

Exercice 3.6. On considère trois pièces: une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une pièce au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche?

Exercice 3.7. Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Tu es sûr à 90 % que ton voisin l'arrosera.

1. Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour?
2. Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser?

Exercice 3.8. Soit n un entier positif. On considère n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$; ces individus mentent avec probabilité $p\,(0 < p < 1)$, et leurs comportements sont indépendants. Une information (sous forme de oui ou non) est donnée à I_1 qui la transmet à I_2, ... qui la transmet à I_n, qui l'annonce au monde. Quelle est la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise, c.à.d. que l'annonce de I_n coincide avec l'information donnée à I_1 ? Montrer que $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$. (Indication : se souvenir des solutions des exercices 1.7(d) et (e).)

Exercice 3.9. (Le jeu des trois portes) Le jeu des trois portes était un jeu télévisé populaire (Let's make a deal) diffusé dans les années 1970 aux états-Unis. Le joueur est placé devant 3 portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture que le joueur peut gagner. Derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur connait la position de la voiture. Le joueur doit d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui est ni celle choisie par le candidat, ni celle qui cache la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte initialement choisie, ou bien de changer son choix vers la troisième porte.

1. Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il garde son choix initial ?
2. Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il choisit la troisième porte ?

Exercice 3.10. (Difficile) Dans une voiture de TGV toutes les places sont vendues. La première personne qui arrive est un peu tête-en-l'air, et se met aléatoirement à une place (mais dans la bonne voiture). Chaque personne suivante qui arrive applique la règle suivante : si sa place est encore libre, elle se met sur sa place prévue, si sa place est déjà prise, elle se met aléatoirement sur une des places encore libres. Quelle est la probabilité que la dernière personne qui arrive pourra se mettre sur sa place prévue ? (Indication : cette question peut se faire sans aucun calcul et sans mentionner les probabilités conditionnelles. Or, pour avoir une idée, vous pouvez calculer les cas où une voiture de TGV n'a que 2, 3, ou 4 sièges.)