Probabilités

Contrôle Continu 3
Jeudi 8 décembre
Durée : 2 heures

- L'usage de tout logiciel, d'internet, calculatrice est interdit.
- La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
- Les réponses doivent être justifiées.

Sur votre copie doit figurer de façon LISIBLE votre PRÉNOM, votre NOM, et votre groupe. Vous devez rendre votre copie dans le tas de copies correspondants à votre groupe.

- Groupe 1 (Le lundi avec Ludovic Marquis)
- Groupe 2 (Le lundi avec Rémi Danain-Bertoncini)
- Groupe 3 (Le lundi avec Lisa Balsollier)
- Groupe 4 (Le lundi avec Ludovic Marquis)
- Groupe 5 (Le vendredi avec Lisa Balsollier)

Le tableau ci-dessous rappelle les espérances et variances de certaines lois usuelles.

Dénomination	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme discrète $X \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$		$\mathbb{V}(X)=\frac{n^2-1}{12}$
Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X)=\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{E}(X)=\lambda$	$\mathbb{V}(X)=\lambda$
Loi uniforme continue $X \sim \mathcal{U}([a,b])$		$\mathbb{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda}$	$\mathbb{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{E}(X)=\mu$	$\mathbb{V}(X)=\sigma^2$

Questions de cours

1. Rappeler la définition de la phrase : "les variables aléatoires X et Y sont indépendantes".
2. Rappeler la définition de la loi de Poisson.
3. Rappeler la définition de la covariance.
4. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, on suppose de plus que les probabilités que $(X, Y) = (i, j)$ sont données par le tableau suivant :

Y \ X	0	1
1	$2/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$

   a. Calculer la covariance de X et Y.

   b. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de 12 clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. La soirée a été un peu arrosée, et, après chaque essai, le concierge remet la clé dans le trousseau. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

   a. Quelle est la loi de X (on reconnaitra une loi classique) ?

   b. Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?

2. Le concierge est en réalité accompagné de Sam, qui n'a pas bu. Sam élimine donc après chaque essai infructueux la clé qui n'a pas convenu. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

a. Quelles valeurs peut prendre Y ?

b. Déterminer $\mathbb{P}(Y=1)$.

c. Déterminer $\mathbb{P}(Y=2)$.

d. Montrer que pour tout $k \in [\![1,12]\!]$, $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{1}{12}$.

e. Quel est le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé ?

Exercice 2

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire continue de densité donnée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité.

2. Calculer l'espérance de X.

3. Calculer la variance de X.

4. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$.

Exercice 3

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, on suppose de plus que les probabilités que $(X,Y) = (i,j)$ sont données dans le tableau suivant :

Y \ X	-1	0	1
1	$3/24$	$1/24$	$2/24$
2	$1/24$	$4/24$	$1/24$
3	$2/24$	$1/24$	$5/24$
4	$1/24$	$2/24$	$1/24$

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.

2. Donner la loi de X et son espérance.

3. Donner la loi de Y et son espérance.

4. Donner la loi de X^2 et son espérance.

5. Calculer $\mathbb{P}(X=0|Y=2)$, autrement dit calculer la probabilité de l'événement $\{X=0\}$ sachant l'événement $\{Y=2\}$.

6. Est-ce que les événements $\{X=0\}$ et $\{Y=2\}$ sont indépendants ?

7. Calculer $\mathbb{P}(X+Y=3)$.

Exercice 4

On considère le couple de variables aléatoires conjointement continues $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par la fonction f :

$$f(x,y) = \frac{4}{5}(xy+1)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Vérifier que f est bien une densité.

2. Calculer la densité de X.

3. Calculer la densité de Y.

4. Calculer l'espérance de X.

N'oubliez pas votre carte d'étudiant et/ou votre carte d'identité en partant.