UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Probabilités

Contrôle Continu 1
Mercredi 12 octobre
Durée : 1 heure

Correction succincte (sans les applications numériques)

Questions de cours

1. Donner la définition de la loi de Bernoulli.

2. Donner la définition de la loi géométrique.

3. On suppose que les événements A et B sont indépendants, de probabilités respectives p et q.

a. Rappeler la définition de l'indépendance.

b. Montrer que les événements A^c et B^c sont aussi indépendants. On montre que si les événements X, Y sont indépendants alors X, Y^c indépendants. En appliquant deux fois cette implication, on aura ainsi montrer que A^c et B^c sont indépendants.

$$\mathbb{P}(X \cap Y) + \mathbb{P}(X \cap Y^c) = \mathbb{P}(X)$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \cap Y^c) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X)(1 - \mathbb{P}(Y)) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y^c)$$

c. Donner une formule pour la probabilité de l'événement $A \cup B$.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = 1 - (1-p)(1-q)$$

ou

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = p + q - pq.$$

Exercice 1

On dispose d'un jeu classique de 32 cartes, contenant les valeurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans les 4 couleurs (coeur, pique, carreaux, trèfle). On tire 5 cartes sans remise.

1. Donner une description de l'univers de cette expérience aléatoire. Quel est le cardinal de celui-ci ? On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire, l'ensemble Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble $\{7 \text{ pique}, \dots, \text{As coeur}\}$. Ainsi $\#\Omega = \binom{5}{32}$.

2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 reines ? *Indication : "avoir exactement 3 reines signifie par exemple "avoir 3 reines et deux rois" ou bien "avoir 3 reines, un roi et un as" etc...*
Nombres de donnes avec 3 reines :

$$\binom{3}{4} \cdot \binom{2}{28} = \frac{4 \cdot 28 \cdot 27}{2}$$

- choix des 3 reines parmi 4.
- choix des valeurs des deux autres cartes.

Probabilités d'avoir 3 reines :

$$\frac{\binom{3}{4} \cdot \binom{2}{28}}{\binom{5}{32}}$$

3. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cartes de même valeur ? *Indication : "avoir exactement 3 cartes de même valeurs" signifie par exemple "avoir 3 as et deux rois" ou bien "avoir 3 valets, un roi et un as" etc...*

$$\frac{8 \cdot 4 \cdot \binom{2}{28}}{\binom{5}{32}}$$

- choix de la valeur du brelan.
- choix des 3 parmi 4 qui font le brelan (ou choix de celle qui n'est pas là).
- choix des valeurs des deux autres cartes.

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. On note B_i l'événement la boule tirée au i-ième tirage est blanche et N_i l'événement la boule tirée au i-ième tirage est noire.

1. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche ?

$$\mathbb{P}(B_1) = {}^4\!/_7$$

2. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit noire et la seconde blanche ? La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_2|N_1) = {}^3\!/_7 \cdot {}^4\!/_6$$

3. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ? La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(N_3|B_1 \cap B_2) = {}^4\!/_7 \cdot {}^3\!/_6 \cdot {}^3\!/_5$$

Exercice 3

Une compagnie d'assurance BYB répartit ses clients en trois classes : les bons risques notés R_1, les risques moyens notés R_2 et les mauvais risques notés R_3. 20% des assurés de la compagnie BYB appartiennent à la classe R_1, 50% à la classe R_2, et 30% à la classe R_3. Les statistiques indiquent que la probabilité d'avoir un accident au cours de l'année est de 0.05 pour une personne de la classe R_1, 0.15 pour une personne de la classe R_2 et 0.30 pour une personne de la classe R_3.

1. Récapituler les probabilités données par cet énoncé après avoir défini proprement les événements utiles.

On note :

- R_1 l'événement des clients qui sont des bons risques.
- R_2 l'événement des clients qui sont des risques moyens.
- R_3 l'événement des clients qui sont des mauvais risques.

- A l'événement avoir un accident pendant l'année.

On a :

$$\mathbb{P}(R_1) = 0.2 \qquad \mathbb{P}(R_2) = 0.5 \qquad \mathbb{P}(R_3) = 0.3$$

$$\mathbb{P}(A|R_1) = 0.05 \qquad \mathbb{P}(A|R_2) = 0.15 \qquad \mathbb{P}(A|R_3) = 0.30$$

2. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les assurés de la compagnie BYB ait un accident dans l'année ?

Formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(A|R_2)\mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(A|R_3)\mathbb{P}(R_3)$$

3. M. Martin est assuré chez BYB. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

$$\mathbb{P}(R_1|A^c) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{P}(A^c|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{(1 - \mathbb{P}(A|R_1))\mathbb{P}(R_1)}{1 - \mathbb{P}(A)}$$