Probabilités - Correction du CC2

Questions de cours

1. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une collection finie ou infinie d'événements de Ω qui forme une partition de Ω. Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

2. Si X suit une loi exponentielle de paramètres $\lambda > 0$, alors on a

$$X(\Omega) = \mathbb{R}$$

$$\text{et sa densité est } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $X : \Omega \to R$ une v.a. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Supposons que $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$ existent. Pour tout nombre réel $k > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mu|) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

4. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) \\ &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

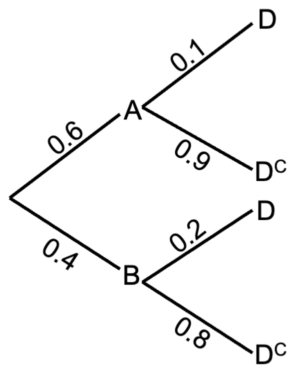
Pour calculer $\mathbb{V}(X)$, on calcule d'abord $\mathbb{E}(X^2)$. Par la formule de transfert *(prop. 5.5, point 4 du cours)*, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X = 3) \\ &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 9 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{15}{8} - \frac{7^2}{8^2} = \frac{71}{64} \end{aligned}$$

Exercice 1



1. On note les événements :
A : "le jouet a été fabriqué par l'entreprise A"
B : "le jouet a été fabriqué par l'entreprise B"
D : "le jouet est défectueux".
L'énoncé nous donne :

- $\mathbb{P}(D|A) = 0.1$
- $\mathbb{P}(D|B) = 0.2$
- $\mathbb{P}(A) = 0.6$
- $\mathbb{P}(B) = 0.4$

D'après la formule des probabilités totales avec la partition (A, B), on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)\\ &= 0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4\\ &= 0.14.\end{aligned}$$

2. D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}\\ &= \frac{0.1 \times 0.6}{0.14} \text{ par la question 1.}\\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On répète 117 épreuves de Bernoulli de succès "venir à l'anniversaire de Léa", de probabilité $1 - 0.1 = 0.9$ et X compte le nombre de succès. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 117$ et $p = 0.9$.

2. D'après le cours :

$$\mathbb{E}(X) = np = 117 \times 0.9 = 105.3$$

$$\text{et } \mathbb{V}(X) = np(1-p) = 117 \times 0.9 \times (1 - 0.9) = 10.53.$$

3. Léa doit changer de salle s'il y a plus de 100 invités. Ainsi, la probabilité qu'elle doive changer de salle est :

$$\mathbb{P}(X > 100) = \sum_{k=101}^{117} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=101}^{117} \binom{117}{k} \times 0.9^k \times 0.1^{117-k}.$$

Exercice 3

1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$, alors on a

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

2. Comme l'espérance est linéaire, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(3X - 5) \\
&= 3\mathbb{E}(X) - 5 \\
&= 3\lambda - 5.
\end{aligned}$$

En revanche, la variance n'est pas linéaire. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(3X - 5) \\
&= 3^2\mathbb{V}(X) \\
&= 9\lambda.
\end{aligned}$$

3. On applique la formule de transfert *(prop. 5.5, point 4 du cours)* avec la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \\
&= \mathbb{E}(f(X)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$