Probabilités - Correction du CC1

Questions de cours

1. Si X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, alors on a

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$, alors on a

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}\big((A \cup B)^c\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - \big(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\
&= \big(1 - \mathbb{P}(A)\big)\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) \\
&= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

Donc A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 1

1. L'énoncé nous donne $\mathbb{P}(S_1|P) = 1/2$ et $\mathbb{P}(S_1|P^c) = 1/6$. Il nous donne également $\mathbb{P}(P) = 25/100 = 1/4$ donc $\mathbb{P}(P^c) = 75/100 = 3/4$. D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(S_1|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S_1|P^c)\mathbb{P}(P^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

2. Une fois le dé choisi, comme les lancers sont indépendants, on a $\mathbb{P}(S_n|P) = (1/2)^n$ et $\mathbb{P}(S_n|P^c) = (1/6)^n$. D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$\mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(S_n|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S_n|P^c)\mathbb{P}(P^c) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{3}{4}$$

3. D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P|S_1) &= \frac{\mathbb{P}(P \cap S_1)}{\mathbb{P}(S_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(S_1|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S_1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P|S_n) &= \frac{\mathbb{P}(P \cap S_n)}{\mathbb{P}(S_n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(S_n|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S_n)}\\ &= \frac{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6^n}\cdot\frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{1+\frac{3\cdot 2^n}{6^n}}\\ &= \frac{1}{1+3^{1-n}}\end{aligned}$$

5. On a $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{1-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(P|S_n) = 1$.

Exercice 2

1. Il y a 10 choix pour le président, puis 9 choix pour le secrétaire, puis 8 choix pour le trésorier. On peut donc former $10 \times 9 \times 8 = 720$ bureaux différents.

Autrement dit, il s'agit d'un tirage sans remise (car personne ne peux avoir deux charges) et avec ordre (car les rôles sont distincts). On cherche donc le nombre d'arrangement A_{10}^3, qui vaut 720.

2. Comptons le nombre de bureaux où A et B siègent ensemble. Il y a 3 choix pour le rôle de A, puis 2 choix pour le rôle de B, et enfin 8 choix pour le membre qui prendra le troisième rôle. Il y a donc $3 \times 2 \times 8 = 48$ bureaux où A et B siègent ensemble. Il y a donc $720 - 48 = 672$ bureaux où A et B ne siègent pas ensemble.

3. Comme on l'a vu, il y a 48 bureaux où C et D siègent ensemble. Comptons le nombre de bureaux dans lesquels ni C ni D ne siègent. Il y a 8 choix pour président, puis 7 pour le secrétaire, puis 6 choix pour le trésorier. Il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ bureaux dans lesquels ni C ni D ne siègent. Au final, il y a $48+336 = 384$ bureaux dans lesquels C et D siègent ensemble ou pas du tout.

4. Si E doit avoir une charge, il y a tout d'abord 3 choix pour le rôle de E, puis 9 choix le membre ayant le deuxième rôle, puis 8 choix pour le membre ayant le troisième rôle. Il y a donc $3 \times 9 \times 8 = 216$ bureaux dans lesquels E a un rôle.

5. Si F prend la charge de président, il reste 9 choix pour le secrétaire, puis 8 choix pour le trésorier. Et si F ne prend aucune charge, il y a 9 choix pour président, puis 8 pour le secrétaire, puis 7 choix pour le trésorier. Au final, il y a $9 \times 8 + 9 \times 8 \times 7 = 576$ bureaux dans lesquels F est président ou rien du tout.