UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Probabilités

Contrôle Continu 3
Mercredi 8 décembre
Durée : 2 heures

- L'usage de tout logiciel, d'internet, de calculatrice est interdit.
- La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
- Les réponses doivent être justifiées.

Sur votre copie doit figurer de façon LISIBLE votre PRÉNOM, votre NOM, et votre groupe. Vous devez rendre votre copie dans le tas de copies correspondants à votre groupe.

- Groupe 1 (Le lundi avec Lisa Balsollier)
- Groupe 2 (Le vendredi avec Lisa Balsollier)
- Groupe 3 (Le lundi avec Lucien Grillet)
- Groupe 4 (Le lundi avec Ludovic Marquis)
- Groupe 5 (Le vendredi avec Ludovic Marquis)

Questions de cours — 5 pts

1. Soient A et B deux événements d'un univers Ω. On suppose que A et B sont indépendants et disjoints. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$. 1pt

2. Soient $n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$. Soit S une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Démontrer avec soin que $\mathbb{E}(S) = np$ et $\mathbb{V}(S) = np(1-p)$. 2pts

3. Donner la définition de la loi géométrique. 1pt

4. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. 1pt

Exercice 1 — 6 pts

On considère une urne contenant trois boules une bleue, une rouge et une verte. On effectue n tirages avec remise. On note X_b le nombre de boules bleues tirées pendant ses n tirages, X_r le nombre de boules rouges tirées pendant ses n tirages et X_v le nombre de boules vertes tirées pendant ses n tirages.

1. Donner la loi de X_b, X_r et X_v. 1pt

2. Calculer la variance de X_b, X_r et X_v. 1pt

3. Calculer la variance de $X_b + X_r$. *On pourra utiliser une relation entre X_b, X_r et X_v.* 2pts

4. En déduire, la covariance du couple (X_b, X_r). 2pts

Exercice 2 **5 pts**

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire continue de densité donnée par la fonction

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité. 1pt

2. Calculer l'espérance de X. 1pt

3. Calculer la variance de X. *On pourra donner la réponse finale à cette question sous la forme d'une différence de deux fractions.* 1pt

4. Estimer la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$ à l'aide l'inégalité de Markov. 1pt

5. Calculer la valeur exacte de $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$. 1pt

Exercice 3 **6 pts**

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, on suppose de plus que les probabilités que $(X, Y) = (i, j)$ sont données dans le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2	3
-1	$1/36$	$2/36$	$4/36$	$1/36$
0	$4/36$	$1/36$	$6/36$	$1/36$
1	$5/36$	$6/36$	$4/36$	$1/36$

1. Donner la loi de X et son espérance. 1pt

2. Donner la loi de Y et son espérance. 1pt

3. Calculer $\mathbb{P}(X = 1 | Y = 0)$, autrement dit calculer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$ sachant l'événement $\{Y = 0\}$. 1pt

4. Est-ce que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 0\}$ sont indépendants ? 1pt

5. Calculer la covariance du couple (X, Y). *On pourra donner la réponse finale à cette question sous la forme d'une différence de deux fractions.* 1pt

6. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ 1pt

Exercice 4 **6 pts**

La durée de vie X d'un composant électronique, exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ. On admet qu'en moyenne, un composant a une durée de vie de 8 années.

1. Rappeler pourquoi, pour tout $t \geqslant 0$, on a : 1pt

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad \text{pour un certain } \lambda > 0.$$

2. Expliquer pourquoi $\lambda = 1/8$. 1pt

3. Déterminer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans. 1pt

4. Déterminer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 7 ans. 1pt

Une machine est composée de deux composants A et B identiques à celui des questions précédentes et indépendants entre eux. La machine tombe en panne dès que l'un des deux composants cesse de fonctionner.

5. Exprimer la durée de vie Y de la machine en fonction des durées de vie X_A et X_B des composants A et B. 1pt

6. Déterminer la probabilité que la machine ait une durée de vie supérieure à 7 ans. 1pt

N'oubliez pas votre carte d'étudiant et/ou votre carte d'identité en partant.