Contrôle continu du mardi 13 octobre 2020
Durée : 1h30

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Questions de cours

1. Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Donner la définition d'un majorant de A, *avec une phrase en français puis uniquement avec des symboles mathématiques.*

2. Montrer, en utilisant seulement la définition, que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

3. Donner la définition d'une fonction dont le graphe admet la droite $x = 1$ comme axe de symétrie.

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x-2| < |x+2|$.

Exercice 2

On définit deux applications f et g de $[0,1]$ dans $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1/4] \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,2/3] \\ 3x-2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que les applications f et g sont bien à valeurs dans $[0,1]$.

2. Déterminer $f \circ g$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. Étudier sa parité.

3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

Exercice 4

Soit la fonction $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g et calculer sa dérivée.

2. Étudier le signe de la dérivée de g et en déduire l'inégalité $\ln(x+1) - \ln(x) \geqslant \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

1. Montrer que f est périodique de période 1.

2. Donner l'expression de f sur $[0,1]$, puis sur $]1,2]$.

3. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3,3]$.