Grand contrôle continu
Durée : 3 h

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses doivent être justifiées.

Question de cours

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$.
Montrer que x_0 est racine de P si et seulement si $X - x_0$ divise P.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On considère $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[0,1]$ tels que $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On note $P(n)$ la propriété :

$$\text{« } \textit{Il existe } k \in \{1, \ldots, n\} \textit{ tel que } |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1}{n}. \text{ »}$$

1. Écrire la négation de $P(n)$ à l'aide de quantificateurs.

2. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété $P(n)$.

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec f strictement décroissante. On justifiera les réponses aux questions suivantes par une démonstration, un exemple ou un contre-exemple explicite.

1. Montrer que f est injective.

2. La fonction f peut-elle être aussi croissante ?

3. L'application f est-elle nécessairement surjective ?

4. Rappeler la définition d'une fonction périodique. La fonction f peut-elle être périodique ?

5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. $g \circ f$ est-elle nécessairement monotone ? strictement monotone ?

Problème 1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Le but de ce problème est de trouver des formules explicites pour les racines de P dans certains cas particuliers.

1. Montrer qu'il existe un nombre $d \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$P(X + d) = X^3 + pX + q\,.$$

On pose alors $Q = X^3 + pX + q$.

2. Si $p = 0$, donner une racine réelle de Q.

3. Montrer que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $3uv + p = 0$, on a

$$Q(u + v) = u^3 + v^3 + q\,.$$

4. Trouver toutes les solutions du système suivant, d'inconnue $(U, V) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{cases} U + V = -q \\ UV = -\frac{p^3}{27} \end{cases}\,.$$

On introduira la quantité

$$\delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3\,,$$

et on décrira les solutions suivant que $\delta = 0$, $\delta > 0$ ou $\delta < 0$.

5. Lorsque $\delta \geq 0$, montrer que Q possède une racine réelle dont on donnera l'expression en fonction de p et q.

6. Lorsque $\delta \geq 0$, expliquer pourquoi on peut trouver explicitement toutes les racines complexes de P.

Problème 2

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies par les formules $f(x) = x \ln \left|1 + \frac{1}{x}\right|$ et $g(x) = -x - 1$ où ln désigne la fonction logarithme néperien de base e.

1. **a.** Donner les domaines de définition des fonctions f et g.
   b. Donner le domaine de définition de la fonction $h = f \circ g$.
   c. Expliciter la fonction h.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = h(x)$.

3. **a.** On définit la fonction $\varphi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\,, \quad \varphi(x) = x - \ln(1 + x)\,.$$

   Calculer la dérivée de φ et dresser le tableau de variations de φ.
   b. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(n) \leq 1 \leq h(n)$.
   d. En déduire l'encadrement suivant de e :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\,.$$

   Préciser cet encadrement pour $n = 1$.

4. **(Bonus)**
   a. On note $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire

$$\ell(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\ell(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.
   b. Donner un rang à partir duquel l'encadrement de e ci-dessus permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| \leq 10^{-3}.$$