Feuille n^o 4 : Calcul de Primitives

1 Basique

Exercice 1

Montrer que les fonctions F et G suivantes sont deux primitives de la même fonction f sur $]1, +\infty[$.

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}, \qquad G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}.$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^4 (t-3)dt, \qquad (2) \int_4^{-1} (x^2 - 4x)dx, \qquad (3) \int_1^2 (u^2 - \frac{1}{u})du.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-1, 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Soit g la fonction définie sur le même intervalle $[-1, 3]$ par $g(x) = |f(x)|$. Dessiner les graphes de f et g. Calculer l'aire du domaine D :

$$D = \{x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

Exercice 4

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ 3x^2 + 4x - 2\,; \qquad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,; \qquad (3)\ \sqrt{x}\,; \qquad (4)\ e^{2x+1}.$$

Exercice 5

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = |x|$. Calculer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de f qui s'annule en zéro, autrement dit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Répondez, <u>en justifiant vos réponses</u>, aux questions suivantes, par oui ou non (la réponse à la question est oui lorsqu'elle est vraie pour n'importe quelle fonction f précédemment définie) :

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f ?

2. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$?

3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$?

4. Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$?

5. Si f est paire alors F est impaire ?

6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$?

2 Intégration par parties

Exercice 7

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ x\cos(x); \qquad (2)\ \ xe^{2x}.$$

Exercice 8

Via une intégration par parties, calculer une primitive des fonctions suivantes

(1) $x\ln x$; (2) $\arctan x$; (3) x^2e^{-x} (4) $\ln x$

(5) $e^x\cos(x)$; (6) $x^3e^{-x^2}$; (7) $x^3\operatorname{sh} x$

3 Changement de variable et/ou primitive de $\varphi' f'(\varphi)$

Exercice 9

Pour chaque fonction, déterminer l'unique primitive qui vérifie la condition proposée :

1. $f(x) = x^2(x^3+2)^4$; $F(-1) = 1$
2. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2-2}$; $G(3) = \ln(5)$
3. $h(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$; $H(1) = e^3$

Exercice 10

À l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ 2x\sin(x^2); \qquad (2)\ 2e^{2x}; \qquad (3)\ 3x^2(x^3+4)^9.$$

Exercice 11

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-20, 12]$ par $f(x) = \ln(\frac{1}{7}x+3)$. Calculer la primitive de f valant 7 en -14.

Exercice 12

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$.

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

Exercice 13

Calculer une primitive des fonctions suivantes en faisant un changement de variable :

1. $\dfrac{1}{x^2+25}$

2. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

3. $x\sqrt{1+x^2}$

4. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 14

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\varphi' f'(\varphi)$

1. $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

2. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

3. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

4 Fractions rationnelles

Exercice 15

Via des calculs d'éléments simples, nous allons calculer des primitives de fractions rationnelles.

1. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{X^3-X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-x}$.

2. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = a + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X-2}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$.

3. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2+2}{X^2+1} = a + \dfrac{bX+c}{X^2+1}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

4. **a.** Trouver quatres réels a, b, c et d tels que $\dfrac{X^3+1}{X^2+4} = aX + b + \dfrac{cX+d}{X^2+4}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+4}$.

Exercice 16

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1-t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^2-t+1}\,dt$

5 Pour aller plus loin

Exercice 17

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ (x^3-2)^2; \qquad (2)\ \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)^2.$$

Exercice 18

Via une intégration par parties, calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\ln^2 x$
2. $\cos x \ln(1+\cos x)$
3. $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
4. $\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+x$.

Exercice 19

1. Soit n un entier naturel. Intégrer par parties $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cos(nx)\,dx$.
2. Calculer, en intégrant par parties, $I = \int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ en fonction de
   $J = \int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$. Calculer J en fonction de I. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 20

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. Montrer que le produit $(n\ +1)I_n I_{n+1}$ est constant.
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.
5. Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 21

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\dfrac{1}{\cos x}$
2. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

Exercice 22

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $\sin(\cos x)\sin x$
2. $x^3 e^{-x^2}$
3. $2x(x^2+1)\exp(x^2)$.
4. $x^{\frac{1}{2}} \ln x$
5. $\dfrac{\sin x}{e^x}$

Exercice 23

1. Montrer que si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$
2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :
$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\,dx.$$
On pourra utiliser librement la formule :
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Exercice 24

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\int_a^b f(t)dt\ = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 25

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.