Examen 2eme session
Mercredi 24 juin
Durée : 2h + 30 min pour faire un fichier pdf et nous le transmettre

Questions de cours

1. Montrer, en utilisant seulement la définition, que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2. Montrer, en utilisant seulement la définition, que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.
3. Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles de la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par :
$$g(x, y, z) = \sin(x)e^z + \cos(xy) + \arcsin(z)$$
4. Calculer la limite de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Donner, en justifiant votre réponse, une primitive de chacune des fonctions suivantes :
$$h_1 : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_2 : \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que $(1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
3. Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations de f.
5. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer si f admet ou non un ou plusieurs maximums, minimums, les calculer lorsqu'ils existent.
6. Tracer $\mathcal{C}$.
7. Calculer une primitive de f en faisant le changement de variables $t = x - 1$.

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 + x^2) \cos(nx)\, dx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\left| \dfrac{2x}{1 + x^2} \sin(nx) \right| \leqslant 1$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $|I_n| \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit $\alpha \geqslant 0$. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}$ et la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \alpha. \end{cases}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inégalité $f(x) < x$.

3. Montrer par récurrence que $(u_n)_n$ est positive.

4. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.

5. Montrer que, si $0 \leqslant \alpha < 1$, alors la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et majorée par 1.

6. Montrer que, si $1 < \alpha < 3$, alors la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par 1.

7. Montrer que, si $\alpha > 3$, alors la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et non majorée.

8. En déduire pour quelles valeurs de $\alpha \geqslant 0$, quand la suite $(u_n)_n$ converge, diverge vers $+\infty$, et lorsqu'elle converge déterminer sa limite.

9. Montrer que, si $\alpha \in [0, 1]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leqslant \frac{1-\alpha}{2^n}.$$