Portail Maths et applications - L1 **Analyse 1**
Université Rennes 1 2017–2018

Examen Terminal - Deuxième session
Durée : 2 heures

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Question de cours

1. Soit A est une partie non vide de $\mathbf{R}$. Qu'est-ce qu'un majorant de A ? À quelle condition A possède-t-elle un supremum ?
2. Énoncer le théorème de dérivation des fonctions composées. Dériver la fonction $x \mapsto e^{\sin(x)}$.
3. Donner une primitive de $x \mapsto xe^x$.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inégalité :

$$|x-3| + |x+4| \leqslant 10.$$

Exercice 2

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{3n+1+\sqrt{n^2+3}}{n+3}$
2. $v_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 3

On introduit les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.
4. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers une limite commune, que l'on notera e.

   On va montrer par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbf{N}^*$ tel que $e = \frac{p}{q}$.
5. Montrer que $q!e = q!u_q$.

6. En déduire que $u_q = e$.
7. Conclure.

Exercice 4

1. Calculer les intégrales suivantes
$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$$
$$\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\, dt.$$
2. À l'aide du changement de variable $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t \ + \frac{1}{2}\right)$, calculer
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$$
3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déduire des questions précédentes, la valeur de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+t+1)}$$