Contrôle continu du mardi 14 décembre 2021
Durée : 1h30

L'usage de documents, calculatrices et téléphones portables est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Questions de cours

1. Montrer, en utilisant seulement la définition vue en cours, que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.

2. Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles de la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x, y, z) = \ln(x^2 + 1)e^{z^2} + \sin(xy) + \arcsin(z)$$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.

a. Donner la définition vue en cours de : « la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini » **avec des quantificateurs**.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)^2}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, en utilisant **seulement** la définition précédente.

Exercice 1

On considère la fonction : $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(\frac{4}{27}x^3 - x) \end{array}$

1. Étudier la parité de f.

2. Donner le domaine de dérivabilité de f.

3. Calculer la dérivée f' de f.

4. En déduire les variations de f, on donnera aussi les extremums locaux et les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

Exercice 2

Trouver $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x^2+1)}$ sur $]1, +\infty[$. *En cas d'échec à la première question, vous êtes invité à donner une primitive à l'aide des constantes A, B et C.*

Exercice 3

On considère la fonction : $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{x^2} \end{array} \right.$

1. Étudier la parité de g.
2. Donner le domaine de dérivabilité de g.
3. Calculer la dérivée g' de g.
4. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Expliquer pourquoi g est une bijection.
6. Calculer la primitive G de g qui s'annule en 0.

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de termes généraux :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
4. Montrer que $u_n - v_n \to 0$.
5. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite commune que l'on notera ℓ.
6. Montrer que ℓ vérifie l'inégalité $\frac{5}{4} < \ell < \frac{7}{4}$.