

Contrôle continu du jeudi 14 octobre 2021
Durée : 1h30

**L'usage de documents, calculatrices et téléphones portables est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.**

Questions de cours

1. Donner un exemple de sous-ensemble non-borné de \mathbb{R} qui est un intervalle et un exemple de sous-ensemble non-borné de \mathbb{R} qui n'est pas un intervalle (*On ne demande pas de justification*).
2. **a.** Donner la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x .
b. Montrer que, pour tout réel x , on a : $x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in [0, 2]$.

Exercice 1

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{2p}{2pq + 3} \mid (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que E est minoré.
2. Montrer que E est majoré par 1.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions à valeurs réelles définies par $f(x) = (x + 3)^2$ et

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $x^2 + 6x + 8 = 0$.
2. En déduire que $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 1\} =]-4, -2[$.
3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $x^2 + 6x + 5 = 0$.
4. En déduire que $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 4\} = [-5, -1]$.
5. Déterminer $g \circ f$.

Exercice 3

Soient f, g et h les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 \sin(x)$, $g(x) = (x + 1)^2 \cos(x)$ et $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Montrer que g n'est ni paire ni impaire.
3. La fonction h est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 1}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in D$, $f(-1 - x) + f(-1 + x) = 4$.
2. En déduire que la courbe représentative \mathcal{C} de f admet le point C de coordonnées $(-1, 2)$ comme centre de symétrie.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée.