Examen Terminal d'Analyse 1
Première Session
Durée : 2 h

Les notes de cours et tous autres documents sont interdits.
L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours

1. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité de la fonction $f(x) = \arctan(e^x) + \sqrt{x}$.

2. Donner le domaine de définition et calculer les dérivées partielles de la fonction :

$$g(x, y) = e^{x+y^2} + \frac{1}{\cos(xy)}.$$

3. Montrer uniquement à l'aide des définitions que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n^3)}{n^2}$ tend vers 0.

4. Donner une primitive des fonction suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+2} \qquad\qquad x \mapsto xe^{2x}$$

5. Trouver et justifier la limite de la suite de terme général $v_n = \sqrt{(n+1)^2 - 2} - \sqrt{n^2+1}$.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x-1| + |x+2| \leqslant 10$$

Exercice 2

1. Trouver $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)} = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$$

2. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+3}{x(x-1)}$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie par la formule $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.

2. Montrer que g est impaire.

3. Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g'.

4. Dresser le tableau de variation de g.

On définit la fonction f par la formule $f(x) = \arcsin(g(x))$.

5. Donner le domaine de définition de f.

6. La fonction f est-elle impaire ?

7. Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.

8. Dresser le tableau de variation de f. Calculer les minimums et maximums locaux de f.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |\sin(x) - \sin(y)|.$$

1. Montrer que f est 2π-périodique (c'est-à-dire que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

2. Montrer que la droite $\Delta : x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

3. Montrer que f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et calculer $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. On considère la suite u définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.

3. Montrer que u n'est pas majorée. *On pourra faire un raisonnement par l'absurde.*

4. En déduire la limite de u.