

Feuille n° 5 : Suites

1 Première manipulation

Exercice 1

Soit la suite de terme général $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + n^2 + 2}$. Trouver un entier N , tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < 10^{-2}$.

Plus généralement, ε étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N , tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < \varepsilon$. Qu'a-t-on démontré pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2

Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n + 1}{5n + 2}$.

Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, trouver un entier N_p tel que, pour tout $n \geq N_p$, on ait $|u_n - \ell| < 10^{-p}$.

Même question avec la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{2n^2 + 1}{5n^2 + 2}$.

Observez la différence de rapidité de convergence des deux suites (prendre $p = 4$).

Exercice 3

Écrire sous forme quantifiée les propriétés suivantes :

1. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée
2. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée
3. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente
4. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone

2 Limite I

Exercice 4

Étudier chacune des suites (u_n) définies ci-dessous, et déterminer lesquelles sont (a) bornées, (b) positives ou négatives, (c) croissantes, décroissantes, (d) convergentes, non convergentes, divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$,

3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 5

Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies ci-dessous, compléter la définition le cas échéant pour que l'expression proposée ait un sens, étudier la convergence de la suite et déterminer sa limite lorsqu'elle est convergente.

1. $\forall n \in ?, u_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$,

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$.

Exercice 6

Montrer, en utilisant la définition, que les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Montrer que, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3 Vrai ou Faux

Exercice 8

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si f est une application croissante, la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si f est une application croissante, la suite $(f^n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Si P est une fonction polynomiale, la suite $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.
4. Si $0 \leq r \leq 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. Si $0 \leq r < 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $(u_n \cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 alors $(u_n \cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.
8. La suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
9. La suite $((-1)^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
10. La suite $(\frac{1}{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(\frac{(-1)^k}{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.
11. La suite $(\frac{1}{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(\frac{1}{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.
12. La suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $v_k = k - 1$ si k est impair et $v_k = k + 1$ si k est pair est une suite extraite de la suite $(k)_{k \in \mathbb{N}}$.
13. La suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$.
14. On peut extraire de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite constante.

Exercice 9

Chacun des énoncés suivants est-il vrai ou faux ?

S'il est vrai, le démontrer ; s'il est faux, donner un contre-exemple.

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est croissante, majorée par ℓ , elle converge.
3. Si une suite est croissante, majorée par ℓ , elle converge vers ℓ .
4. Toute suite bornée est convergente.
5. Si une suite est convergente, elle est soit croissante majorée, soit décroissante minorée.
6. Toute suite convergente est bornée.
7. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. Si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 10

Les suites suivantes convergent-elles ?

Indication : chercher des suites extraites de la suite (u_n) convergeant vers des limites différentes.

1. $u_n = \frac{2n+1 + (-1)^n n}{n}$
2. $v_n = \frac{1}{n^2 + n^{(-1)^n}}$
3. $w_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

4 Limite II

Exercice 11

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad v_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \sin(n)}$$

Exercice 12

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et convergente puis trouver la limite. *On rappelle que, pour tout $x > 0$, on a $\sin x < x$.*

Exercice 13

Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = \sqrt[n]{n}$
2. $u_n = \sqrt[n]{\ln(n)}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 14

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}} \quad v_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$$

5 Comparaison des suites

Exercice 15

Pour les couples $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivants, déterminer si $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$.

1. $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.
2. $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(10^6 n)$.
4. $u_n = e^n$ et $v_n = e^{n+10^{-6}}$.
5. $u_n = e^n$ et $v_n = e^{2n}$.
6. $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(n+1)$.
7. $u_n = (2n)!$ et $v_n = e^{10^6 n}$.

Exercice 16

Trouver un équivalent le plus simple possible pour les suites suivantes :

1. $q_n = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_1 n + a_0$ avec $d \geq 1$ un entier et $a_d \neq 0$.
2. $r_n = \sqrt{n^2 + 17}$.
3. $s_n = \cos\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$.
4. $t_n = \ln(27n^3 + 32n^2 + n + 4)$.
5. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$.
6. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

7. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln(n) - 2n^2}$.
8. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Exercice 17

Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :

1. $a_n = \frac{1}{n}$ 2. $b_n = \frac{1}{n^2}$ 3. $c_n = \frac{\ln(n)}{n}$ 4. $d_n = \frac{e^n}{n^3}$ 5. $e_n = n$
6. $f_n = 1$ 7. $g_n = \sqrt{ne^n}$.

6 Suites adjacentes

Exercice 18

Montrer que les suites, définies pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)(k-1)} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 19

Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ son terme d'indice n à l'aide de n , a_0 et b_0 .
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n$; montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 20

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminées par $u_0 = b$, $v_0 = a$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq v_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$

5. Montrer que ces deux suites sont convergentes.

7 Borne supérieure

Exercice 21

Déterminer les bornes supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{(u_n), n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ si n est impair.

Exercice 22

Soit B l'ensemble des rationnels positifs dont la partie entière est un nombre à deux chiffres. Montrer que 100 est un majorant de B , que B n'a pas de plus grand élément, mais qu'il a une borne supérieure.

Exercice 23

On considère le sous-ensemble A de \mathbb{R} défini par $A = \left\{ \frac{2n^2}{n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est borné.
2.
 - a. Étudier l'existence d'un plus grand élément, d'une borne supérieure de A . Les déterminer s'ils existent.
 - b. Étudier l'existence d'un plus petit élément, d'une borne inférieure de A . Les déterminer s'ils existent.
3. On définit une suite réelle par $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Déterminer sa limite ℓ .
 - b. Soit k un entier naturel et $\varepsilon = 10^{-k}$. Déterminer un entier N tel que, pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

8 Suites définies par récurrence

Exercice 24

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$, on note $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $a + d \neq 2, -2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède deux solutions distinctes α, β .
2. Soit $u_0 \in \mathbb{C}$. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
3. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison.

Exercice 25

Soit $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ une application telle que, pour tout $x \in]0, 1[$, on ait $f(x) < x/2$.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1/2$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante, convergente et que sa limite est 0.

Exercice 26

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_1 = 1$ et pour chaque entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. En déduire qu'elle est convergente. Trouver la limite.

9 Pour aller plus loin

Exercice 27

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{[a] + [2a] + \cdots + [na]}{n^2}$$

converge et calculer sa limite.

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

Exercice 29

En simplifiant le terme général u_n , étudier la convergence de la suite

$$u_n = \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 30

Étudier la convergence des suites :

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad b) u_n = \sum_{i=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + i}}$$

Exercice 31

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 32

Soit A une partie de \mathbb{R} . On rappelle que A est *dense* dans \mathbb{R} , si pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que si A est dense dans \mathbb{R} , alors l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de A .
2. Soit A une partie dense dans \mathbb{R} , et x un réel quelconque. Montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A .
3. Réciproquement, soit A une partie de \mathbb{R} telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de A . Montrer que A est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 33

Soit b un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer des valeurs approchées de $a = \sqrt{b}$ par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - b$. On définit donc la suite $(x_n)_n$ par la condition initiale $x_0 = c > a$, où c est un nombre strictement positif, et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1. Trouver une expression simple de x_{n+1} en fonction de x_n et b .
2. En déduire que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et que sa limite est a .
4. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq \frac{1}{2a}(x_n - a)^2.$$

5. On pose $y_n = (x_n - a)/2a$. Majorer y_{n+1} en fonction de y_n . En déduire une majoration de y_n .
6. Que peut-on dire de la vitesse de convergence ?

