Feuille n^o 4 : Calcul de Primitives

1 Basique

Exercice 1

Montrer que les fonctions F et G suivantes sont deux primitives de la même fonction f sur $]1,+\infty[$.

$$F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}, \qquad G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}.$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$a. \quad \int_0^4 (t-3)dt, \quad b. \quad \int_4^{-1} (x^2-4x)dx, \qquad c. \quad \int_1^2 \Big(u^2 - \frac{1}{u}\Big)du.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-1,3]$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Soit g la fonction définie sur le même intervalle $[-1,3]$ par $g(x) = |f(x)|$. Dessiner les graphes de f et g. Calculer l'aire du domaine D :

$$D = \{x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

Exercice 4

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$a. \quad 3x^2+4x-2\,; \qquad b. \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,; \qquad c. \quad \sqrt{x}\,; \qquad d. \quad e^{2x+1}.$$

Exercice 5

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par $f(x) = |x|$. Calculer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de f qui s'annule en zéro, autrement dit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Répondez, en justifiant vos réponses, aux questions suivantes, par oui ou non (la réponse à la question est oui lorsqu'elle est vraie pour n'importe quelle fonction f précédemment définie) :

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f ?

2. Si f est négative sur $\mathbb{R}$, alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$?

3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$?

4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors F est positive sur $\mathbb{R}$?

2 Intégration par parties

Exercice 7

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ x\cos(x); \qquad (2)\ \ xe^{2x}.$$

Exercice 8

À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive des fonctions suivantes

(1) $x \ln x$;	(2) $\arctan x$;	(3) $x^2 e^{-x}$	(4) $\ln x$
(5) $e^x \cos(x)$;	(6) $x^3 e^{-x^2}$;	(7) $x^3 \mathrm{sh}\, x$	

3 Changement de variable et/ou primitive de $\varphi' f'(\varphi)$

Exercice 9

Pour chaque fonction, déterminer l'unique primitive qui vérifie la condition proposée :

1. $f(x) = x^2(x^3+2)^4 \quad ; \quad F(-1) = 1$
2. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2-2} \quad ; \quad G(3) = \ln(5)$
3. $h(x) = (x+1)e^{x^2+2x} \quad ; \quad H(1) = e^3$

Exercice 10

À l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ 2x\sin(x^2); \qquad (2)\ 2e^{2x}; \qquad (3)\ 3x^2(x^3+4)^9.$$

Exercice 11

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[-20, 12]$ par $f(x) = \ln(\frac{1}{7}x + 3)$.
Calculer la primitive de f valant 7 en -14.

Exercice 12

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$.

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

Exercice 13

Calculer une primitive des fonctions suivantes en faisant un changement de variable :

1. $\dfrac{1}{x^2+25}$

2. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

3. $x\sqrt{1+x^2}$

4. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 14

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\varphi' f'(\varphi)$

1. $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

2. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

3. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de f qui s'annule en zéro, autrement dit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Répondez, en justifiant vos réponses, aux questions suivantes, par oui ou non (la réponse à la question est oui lorsqu'elle est vraie pour n'importe quelle fonction f précédemment définie) :

1. Si f est paire, alors F est impaire ?

2. Si f est impaire, alors F est paire ? En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$.

3. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$?

4 Fractions rationnelles

Exercice 16

Via des calculs d'éléments simples, nous allons calculer des primitives de fractions rationnelles.

1. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{X^3 - X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$.

b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3 - x}$.

2. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = a + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X-2}$.

b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2}$.

3. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2 + 2}{X^2 + 1} = a + \dfrac{bX + c}{X^2 + 1}$.

b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

4. **a.** Trouver quatres réels a, b, c et d tels que $\dfrac{X^3 + 1}{X^2 + 4} = aX + b + \dfrac{cX + d}{X^2 + 4}$.

b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$.

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1-t}\, dt \qquad 2) \int_0^1 \frac{t}{t^2 - t + 1}\, dt$$

5 Pour aller plus loin

Exercice 18

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(1)\ (x^3 - 2)^2; \qquad (2)\ \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)^2.$$

Exercice 19

Via une intégration par parties, calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\ln^2 x$

2. $\cos x \ln(1 + \cos x)$

3. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

4. $\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + x$.

Exercice 20

1. Soit n un entier naturel. Intégrer par parties $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx)\, dx$.

2. Calculer, en intégrant par parties, $I = \int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ en fonction de $J = \int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$. Calculer J en fonction de I. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 21

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.

3. Montrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n$.

5. Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 22

Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$1)\ \frac{1}{\cos x} \qquad\qquad 2)\ \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Exercice 23

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$1)\ \sin(\cos x)\sin x \qquad 2)\ x^3e^{-x^2} \qquad 3)\ 2x(x^2+1)\exp(x^2) \qquad 4)\ x^{\frac{1}{2}}\ln x \qquad 5)\ \frac{\sin x}{e^x}$$

Exercice 24

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad\qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\,dx.$$

On pourra utiliser librement la formule :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Exercice 25

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 26

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.