Feuille n^o 3 : Dérivabilité

1 Calcul de dérivées, dérivées de fonctions composées

Exercice 1

En utilisant simplement la définition de la dérivée comme limite, montrer l'existence et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$(a) \quad x \mapsto x^2 + x \ , \ (b) \quad x \mapsto \sqrt{x+1} \ , \ (c) \quad x \mapsto \frac{1}{x+2}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes :

$$(\mathbf{a}) \quad x \mapsto xe^x \ , \ (\mathbf{b}) \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}$$

$$(\mathbf{c}) \quad x \mapsto \sqrt{x^2+e^x} \ , \ (\mathbf{d}) \quad x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(1+x)^{1/3}}$$

$$(\mathbf{e}) \quad x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big) \ , \ (\mathbf{f}) \quad x \mapsto \cos(x\ln(x))$$

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2. Utiliser les résultats concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité.

Exercice 3

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de l'application $f : \mathbb{R}^* \ni x \mapsto \ln|x| \in \mathbb{R}$? Calculer sa dérivée.

2. On considère l'expression :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

Montrer qu'elle permet de définir une application φ (dont on précisera le domaine de départ et le domaine d'arrivée).

3. Montrer que φ est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.

2 Inégalités et extrémas

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, et leurs domaines de définition respectifs, déterminer les minima, maxima locaux et globaux quand ils existent.

$$(a) \quad (x^2-1)^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \quad (b) \quad x^2+2x-3 \ , \ -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Exercice 5

Soit $f(x) = |x^2 - 4|$.

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de f.

Exercice 6

Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 7

Montrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $(1+x)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{3}x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leqslant |x|$.
3. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

3 Variations de fonctions

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et sa parité.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f
3. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x^4 - 4x^2 - 1$.
4. En déduire les variations de f.
5. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$. [1]
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 9

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et sa parité éventuelle.
2. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
3. Déterminer $\tilde{\mathcal{D}}$ le domaine de dérivabilité de f
4. Montrer que $f'(x)$ et $f(x)$ sont de signes opposés pour tout $x \in \tilde{\mathcal{D}}$.
5. En déduire les variations de f.
6. Montrer que, pour tous réels positifs a et b (dont la somme est strictement positive) :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

7. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
8. Tracer le graphe de f.

Exercice 10

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = \ln(1 + x^4) \quad , \qquad f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} \quad , \qquad f_2(x) = x - 2\ln\left(3e^x + 3\right)$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + 3\text{arctan}x - \ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$$

1. Déterminer le signe de $\dfrac{x - 1}{x + 1}$ selon les valeurs de x.
2. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
3. Vérifier que f est impaire.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 - 1}$$

5. En déduire que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^4 + x^2 - 6$.
6. Étudier les variations de f.

---

1. On dit qu'une droite d'équation $y = mx + c$ ($m \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$) est une asymptote oblique à une courbe définie par l'équation $y = f(x)$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$) si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + c) = 0$, (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (mx + c) = 0$).

4 Fonctions réciproques

Exercice 12

On considère la fonction $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x+7$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f

2. Existe-t-il la fonction f^{-1} réciproque de f définie sur $\mathbb{R}$? sur $\mathrm{Im}(f)$?

3. Si oui expliciter f^{-1}, autrement montrer pourquoi on ne peut pas déterminer f^{-1}.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + 2$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ l'image de g

2. La fonction g est-elle injective ?

3. Existe-t-il la fonction g^{-1} réciproque de g définie sur $\mathbb{R}$? sur $\mathrm{Im}(g)$?

4. Si oui expliciter g^{-1}, autrement montrer pourquoi on ne peut pas déterminer g^{-1}.

5. La fonction $\tilde{g} : \mathbb{R}^+ \to [2,\infty[$ définie par $\tilde{g}(x) = g(x)$ est elle bijective ? Existe-t-il la fonction $\tilde{g}^{-1}$ réciproque de $\tilde{g}$? Si oui expliciter $\tilde{g}^{-1}$, autrement montrer pourquoi on ne peut pas déterminer $\tilde{g}^{-1}$.

Exercice 13

On pose $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in D\,, \quad f(x) = \frac{2x}{3x-1}$$

1. Déterminer $f(D)$.

2. La fonction f est-elle injective ?

3. On considère $g : D \ni x \mapsto f(x) \in f(D)$.
Vérifier que g est bijective et expliciter sa réciproque.

4. Esquisser les graphes de g et g^{-1} sur un même dessin.

Exercice 14

On pose $I =]-3,+\infty[$ et on considère $I \ni x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante et réalise une bijection sur son image (bijection qu'on appellera encore f). Donner la bijection réciproque.

2. Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même dessin.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Trouver un sous-domaine $D \subset D_f$ tel que f soit une bijection de D sur $f(D_f)$.
4. Utiliser un théorème du cours pour montrer, sans calculs, que f admet une fonction réciproque définie sur D. Quelle est l'image de f^{-1} ?
5. Tracer f et sa réciproque f^{-1} dans un même repère.
6. Trouver par le calcul l'expression de f^{-1}. Retrouver les résultats précédents.

5 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 16

Expliquer pourquoi en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Exercice 17

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont définies et dérivables et déterminer la dérivée sur ce domaine :

$$(a)\;\; f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \arcsin(x^2) \;\;;\;\; (b)\;\; \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) \;\;;\;\; (c)\;\; \arccos(2x^2-1)$$

Exercice 18

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad , \quad g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad h(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

6 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 19

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. **a.** Établir que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$

   b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection et donner l'expression explicite de sa bijection réciproque, notée argsh.

   b. Calculer la dérivée de argsh.

   c. La fonction $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective, injective ?

   d. On considère maintenant $\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$. Montrer que la fonction est bien définie et qu'il s'agit d'une bijection dont on calculera la réciproque, notée argch.

   e. Calculer la dérivée de argch.

7 Fonctions de plusieurs variables

Exercice 20

Déterminer les domaines de dérivabilité des applications suivantes, puis calculer leurs dérivées partielles.

1. L'application $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = x^2 + y^2$.
2. L'application f de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy^2z$.
3. L'application g de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = uve^v$.
4. L'application $k : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $k(x,y) = \sin(xy^2)$.
5. L'application $l : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définies par $l(u,v,w) = uvw$.

Exercice 21

Déterminer puis représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \cos(x + 2y + 1)$
2. $f_2(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
3. $f_3(x,y) = |xy|$
4. $f_4(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

Déterminer les ensembles où sont définies les dérivées partielles de ces fonctions, puis les calculer.

8 Calculs de limites

Exercice 22

Déterminer les limites suivantes en factorisant ou développant :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2 \ln(x)}.$$

Exercice 23

Déterminer par encadrement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{2x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \cos(x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(\sin(x) - x).$$

Exercice 24

Donner les limites suivantes par croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 3x}{4x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^3 + 40}.$$

Exercice 25

Calculer les limites suivantes à l'aide de la règle de l'Hôpital en vérifiant soigneusement les hypothèses

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

Exercice 26

Calculer les limites suivantes au besoin à l'aide de la règle de l'Hôpital :

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right) \quad , \quad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \quad , \quad (c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 27

Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1} \quad , \quad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \quad , \quad (c)\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$$

9 Pour aller plus loin

Exercice 28

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x))$, pour $x \in [-1, 1]$
2. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{2}\right]$
4. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [\pi\ ,\ 3\pi]$
5. $\cos(\arcsin(x))$, pour $x \in [-1, 1]$.
6. $\sin(\arctan(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 29

Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 30

Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du théorème de Rolle, montrer que le polynôme

$$P(X) = X^n + aX + b$$

admet au plus trois racines réelles distinctes.