

Feuille n° 1 : Nombres réels, inégalités

Dans cette feuille, l'usage de la calculatrice est proscrit.

Préliminaires

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils rationnels : $\frac{1}{2}$, -1 , 3 , $\sqrt{2} - \frac{13}{9}$? On admettra que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

A-t-on, pour tous entiers strictement positifs a , b , c et d ,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

Exercice 3

Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{9}{4} - \frac{13}{3} + \frac{11}{6}, \quad \frac{2}{1 - \frac{30}{29 + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{8}.$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels avec b non nul. Le nombre $\frac{a}{b}$ est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 5

Illustrer graphiquement l'égalité suivante :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad (x+y)(z+t) = xz + xt + yz + yt.$$

Exercice 6

Lequel des deux réels $\frac{10^{20}}{1+10^{20}}$ et $1+10^{-20}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice 7

Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $I_\alpha =]-5 - \alpha, -5 + \alpha[$. Déterminer α pour que, si $x \in I_\alpha$, alors $\left| \frac{x+5}{x+3} \right| < 10^{-2}$.

Inégalités

Exercice 8

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - \sqrt{2}| \leq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}.$$

Exercice 9

1. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$|x - 3| + |x + 4| \leq 7.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$0 \leq \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1.$$

Exercice 10

1. Montrer que, pour tous les réels x et y , on a

$$2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

2. Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$2|xy| = x^2 + y^2.$$

Exercice 11

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $|x - 1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x + y, \quad x - y, \quad |x| - |y|, \quad xy, \quad \frac{x}{y}.$$

Intervalles

Exercice 12

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0, 3] \cap [3, 4[, \quad [0, 3] \cup]3, 4[, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 1\} \quad ?$$

Exercice 13

Existe-t-il un intervalle non-trivial qui ne contient aucun nombre rationnel ?

Exercice 14

1. L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ? Et la réunion de deux intervalles qui s'intersectent ?
2. Trouver deux intervalles dont l'intersection est vide et dont la réunion est un intervalle.

Exercice 15

On rappelle si x est un nombre réel alors le réel $x_+ = \max(x, 0)$ désigne la partie positive de x . On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ > 2\}.$$

1. Représenter graphiquement A et B .
2. Peut-on écrire A et B comme des unions finies d'intervalles disjoints ?
3. Que vaut $A \cup B$? Et $A \cap B$?

Majorants, minorants, maximum, minimum

Exercice 16

Soit

$$E = \left\{ \frac{201}{17}, \quad -23, \quad \frac{145}{12}, \quad 9\sqrt{3} + \frac{111}{12}, \quad 20, \quad -\frac{231}{11} \right\}.$$

SANS calculatrice, smartphone, etc... donner le maximum et le minimum de E . Si on est amené à utiliser une approximation, on la démontrera.

Exercice 17

Existe-il un entier naturel majorant tous les réels ? Existe-t-il un réel majorant tous les entiers naturels ?

Exercice 18

Soit X une partie de \mathbb{R} pour laquelle il existe $M \in X$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad x \leq M.$$

Montrer qu'un tel M est unique. On l'appelle *le maximum* de X .

Exercice 19

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on a $x + y + 3 \neq 0$.
2. On considère le sous-ensemble A de \mathbb{R} défini par :

$$A = \left\{ \frac{x - y}{x + y + 3} : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \right\}.$$

Trouver un majorant et minorant de A .

Pour aller plus loin

Exercice 20

Soit $q \neq 1$. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ et pour $n \geq 0$, on note

$T_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Montrer que :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 21

A-t-on, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + b)_- = a_- + b_-$?

Exercice 22

Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\sqrt{a_+} - \sqrt{b_+}| \leq \sqrt{|a - b|}.$$

Exercice 23

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$. Montrer que pour tous les réels x et y , on a :

$$N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_\infty(x, y).$$

Exercice 24

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} . On pose :

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

On suppose que A et B sont majorées.

1. Montrer que $A + B$ est majorée.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 25

Soit r un réel strictement positif. On introduit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq r\}$. Montrer que A est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = r$.

Exercice 26

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit X une partie finie de \mathbb{R} à n éléments qu'on écrit :

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

1. On pose

$$M_1 = \max(x_1, x_2)$$

et, pour $k \in \{2, \dots, n\}$, on définit

$$M_k = \max(M_{k-1}, x_k).$$

Montrer que $M_n \in X$ et que M_n est un (le) maximum de X .

2. Montrer que X admet une borne supérieure, notée S .
3. Montrer que le maximum de X est égal à S .
4. Montrer que X possède un minimum et que ce minimum est la borne inférieure de X .