Contrôle continu
du jeudi 15 décembre 2022
Durée : 1h30

L'usage de documents, calculatrices et téléphones portables est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Questions de cours

1. Donner la définition de la phrase « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ ».

2. Montrer, en utilisant seulement la définition, que la suite de terme général $u_n = n(2-\cos(n))$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Donner la définition des suites adjacentes et énoncer le théorème des suites adjacentes.

4. Montrer que les suites de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{3}{n+1}$ sont adjacentes.

Exercice 1

1. Calculer les dérivées partielles de :

$$f(x,y) = \sin(xy^2) + \arctan(x + e^y)$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ en faisant une intégration par parties.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$ et $g(x) = 2x+1$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et g.

2. Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$.

3. Déterminer $f \circ g$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2$.

1. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.

2. Justifier que f' est dérivable et calculer f''.

3. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

4. Étudier le signe de f'' pour $x \geqslant 0$.

5. Étudier le signe de f' pour $x \geqslant 0$.

6. En déduire que pour $x \geqslant 0$: $\quad e^{-2x} \leqslant 1 - 2x + 2x^2$.

Exercice 4

On note :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$$

1. Calculer W_0.

2. Calculer W_1.

3. **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant W_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

c. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

4. Nous allons montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

a. Soient $n \in \mathbb{N}$ et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (\sin(x))^{n+1}$. Calculer la dérivée de u.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (\cos(x))^2 dx$.

On pourra faire une intégration par parties (en utilisant la fonction u).

c. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

5. Pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et calculer sa valeur.

6. En déduire que $\ell = 0$.