

Contrôle continu du jeudi 13 octobre 2022
Durée : 1h30

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Sur votre copie doivent figurer de façon LISIBLE votre PRÉNOM, votre NOM et votre groupe.

- MA1 (responsable Nicoletta Tchou)
- MA2 (responsable Nathalie Krell)
- MA3 (responsable Marie-Pierre Lebaud)
- MA4 (responsable Gabriel Caloz)
- MA5 (responsable Ludovic Marquis)

Questions de cours

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner la définition de la partie entière de x que l'on note $\lfloor x \rfloor$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition de la phrase : " f est dérivable en a ".
3. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Donner la définition d'un majorant de A avec une phrase en français, puis uniquement avec des symboles mathématiques.
4. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
 - (a) La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
 - (b) La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.
 - (c) Il existe un réel a tel que $|2a + 1| + |1 - a| \leq 0$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie du graphe de f .

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in [-2, 2]$ et $y \in [0, 1]$, $xy + 3 \neq 0$.
2. On considère le sous-ensemble A de \mathbb{R} défini par

$$A = \left\{ \frac{x - y}{xy + 3} \mid x \in [-2, 2] \text{ et } y \in [0, 1] \right\}.$$

Trouver un majorant et un minorant de A .

Exercice 3

On définit deux applications f et g de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ \frac{1}{4} & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 3/4] \\ 4x - 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que les applications f et g sont bien à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Déterminer $f \circ g$.
3. Déterminer $g \circ f$.

Exercice 4

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ et $g(x) = x^2 e^{|x|}$.

1. Donner les domaines de définition de g et f .
2. Déterminer si f est impaire, paire ou aucun des deux.
3. Déterminer si g est impaire, paire ou aucun des deux.
4. La fonction f est-elle injective ?
5. La fonction g est-elle injective ?
6. La fonction g est-elle surjective ?