Grand contrôle continu
Durée : 4 h

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$x^2 - 3x - 4 < 0.$$

2. Décrire explicitement l'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x^4 - 3x^2 - 4 < 0\right\}$.

3. Donner l'ensemble des majorants et de minorants de A.

Exercice 2

On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{2}; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas injective.

2. Tracer la courbe de g.

3. Montrer que g est bijective.

4. Calculer g^{-1}, la fonction réciproque de g.

5. Vérifier que $g \circ f$ existe.

6. Calculer explicitement l'expression de $g \circ f(x)$.

Exercice 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est paire.

3. Calculer $f'(x)$.

4. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse π.

Exercice 4

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

2. Montrer l'équivalence suivante : Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$n \quad \text{pair} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \quad \text{pair}$$

3. (**Bonus**) Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Problème 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.

4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathcal{C})$ et de (Δ) où (Δ) est la droite d'équation $y = x$.
On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right].$$

En déduire la limite de φ en $+\infty$.

3. Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en un point et un seul.

4. On désigne par α l'abscisse de ce point. Montrer que $0 < \alpha < 1$.

Problème 2

Partie A

Soit f_1 la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{3} - x^{\frac{2}{3}}.$$

1. Soit $x > 0$. Montrer que $1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} > 0 \iff x \in]1,+\infty[$.
2. Calculer $f_1'(x)$ pour $x > 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f_1.
4. Montrer que $\forall x > 0,\ f_1(x) \geqslant 0$.

Partie B

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x+a}{3} - a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x > 0$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Soient b et c deux nombres réels strictement positifs.
   a. Déduire de la question 1 que $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$ et que l'égalité n'a lieu que pour $a = \frac{b+c}{2}$.
   b. Montrer que $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \geqslant bc$ et que l'égalité n'a lieu que si $b = c$.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a, b, c strictement positifs, on a

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$