Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°3 : Groupes linéaires

1 Exo introductifs

On utilisera les notations suivantes $e_n : k^\times \to k^\times$ donnée par $e_n(x) = x^n$, $\mu_n(k) = \ker(e_n)$ et $k^{\times n} = \mathrm{Im}(e_n)$. On note Z le centre de $\mathrm{GL}_n(k)$ et Z_1 le centre de $\mathrm{SL}_n(k)$. On rappelle que $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ est un groupe cyclique d'ordre $n \wedge (q-1)$.

Exercice 1

1. Rappeler pourquoi le noyau du morphisme canonique $\varphi : \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est $\mu_n(k)$.
2. Montrer que le morphisme det : $\mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ induit un morphisme surjectif det : $\mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times / k^{\times n}$ de noyau $\mathrm{PSL}_n(k)$.
3. Montrer que le morphisme canonique $\mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme si et seulement si e_n est un isomorphisme.
4. Pour $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}$, $n \geqslant 2$ discuter l'assertion $e_n : k^\times \to k^\times$ est un isomorphisme.

Exercice 2

À l'aide l'exercice 1, montrer que :

1. Si k est algébriquement clos alors l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.
2. Si $k = \mathbb{R}$ et n est impair alors l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.
3. Si $k = \mathbb{R}$ et n est pair alors l'image de inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est d'indice 2.
4. Si k est un corps fini alors l'image de inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est d'indice $n \wedge (q-1)$. En particulier, d'indice 2 si $n = 2$ et k de caractéristique différente de 2.

2 Étude des cas exceptionnels $(n, k) = (2, \mathbb{F}_2)$, $(2, \mathbb{F}_3)$

Exercice 3 (Groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$)

On travaille dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$.

1. Rappeler le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. En déduire un isomorphisme entre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et un groupe bien connu.
2. En déduire l'ordre du groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.
3. Lister les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et décrire leurs actions sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$.
4. Lister les éléments du groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 4 (Groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$)

1. Soit
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $tst^{-1}s^{-1}$.
2. Déterminer $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$.
Noter que ce calcul ne suffit pas pour déterminer $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$.

Exercice 5 (Étude de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$)

1. Calculer l'ordre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.
2. Rappeler pourquoi $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ sont isomorphes à $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.

3. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
4. Montrer que $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$ est d'ordre 8.
5. Montrer que $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$ est isomorphe au groupe des quaternions $\mathcal{Q}_8$ d'ordre 8.
6. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$.

3 Sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$

Exercice 6 (Sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$)

Soient $n \geqslant 2$ et k un corps. On suppose que $(n,k) \neq (2,\mathbb{F}_2)$ et $(2,\mathbb{F}_3)$.

1. Montrer qu'un sous-groupe inclus dans le centre de $\mathrm{SL}_n(k)$ est distingué.
2. Soit H un sous-groupe distingué propre de $\mathrm{SL}_n(k)$. On suppose que H n'est pas inclus dans le centre $\mathrm{SL}_n(k)$.
   (a) Trouver une transvection dans H. *Utiliser le résultat du cours* $\mathrm{PSL}_n(k)$ *est simple, puisque* $(n,k) \neq (2,\mathbb{F}_2)$ *et* $(2,\mathbb{F}_3)$.
   (b) Conclure que dans ce cas $H = \mathrm{SL}_n(k)$. *Vous pouvez distinguer les cas* $n \geqslant 3$ *et* $n = 2$.

   Si A est un sous-groupe de k^*, on note $\mathrm{SL}_n^A(k) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \det(g) \in A\}$.
3. Montrer qu'un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(k)$ est central ou un $\mathrm{SL}_n^A(k)$.

4 Dévissage exceptionnel de $\mathrm{GL}_n(k)$

Exercice 7 (GL_n n'est pas souvent un produit direct de SL_n)

On rappelle qu'il existe un sous-groupe $A' \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ *tel que :*

$$A' \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1 \quad A'\mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)$$

ou de façon équivalente : $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \rtimes A'$. *On cherche une CNS sur* (n,k) *pour qu'il existe un complément* A *tel que ce produit est en fait direct.*

On suppose qu'il existe un sous-groupe $A \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ tel que :

$$A \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1 \quad A\mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k) \quad [A, \mathrm{SL}_n(k)] = 1$$

ou de façon équivalente : $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \times A$.

1. Montrer que le déterminant induit un isomorphisme de A sur $k^\times$.
2. Montrer que $A \leqslant Z \coloneqq Z\big(\mathrm{GL}_n(k)\big)$.
3. En déduire que $A = Z$.
4. Montrer que Z est un complément de $\mathrm{SL}_n(k)$ si et seulement si l'application déterminant de Z vers $k^\times$ est un isomorphisme.
5. En déduire une CNS sur k et n pour qu'il existe un tel A.

Exercice 8 (GL_n n'est pas souvent un produit semi-direct de PGL_n)

Soient $n \geqslant 2$ et k un corps. On suppose que $(n,k) \neq (2,\mathbb{F}_2)$ et $(2,\mathbb{F}_3)$. On note p la projection canonique $p : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$. On suppose qu'il existe un sous-groupe $H \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ tel que $p : H \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme. Autrement dit, on suppose que la suite exacte $1 \to Z \to \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to 1$ est scindée.

1. Montrer qu'alors $H \cap Z = 1$ et $\langle H, Z \rangle = \mathrm{GL}_n(k)$.
2. Montrer que H est distingué dans $\mathrm{GL}_n(k)$ et qu'alors :

$$\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{PGL}_n(k) \times k^\times$$

3. En déduire que H contient $\mathrm{SL}_n(k)$.

   L'exercice 6 montre qu'il existe $B \leqslant k^\times$, tel que $H = \mathrm{SL}_n^B(k)$

4. Montrer que si $p : \mathrm{SL}_n^B(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est isomorphisme alors :

$$\mu_n(k) = 1, \quad B \cap k^{\times n} = 1 \quad \text{et} \quad Bk^{\times n} = k^\times$$

5. En déduire qu'en fait, on doit avoir $B = 1$.
6. Conclure qu'il existe $H \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ tel que $p : H \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est isomorphisme si et seulement si e_n est isomorphisme. De plus, dans ce cas, on doit avoir $H = \mathrm{SL}_n(k)$.

5 Groupes affines sur les corps finis

Exercice 9 (Groupe affine)

Soit k un corps. On considère le groupe :

$$\mathrm{Aff}(k) = \{x \mapsto ax + b \,|\, a \in k^*,\, b \in k\}$$

Il s'agit du groupe des transformations affines de la droite affine k.

1. Montrer que $\mathrm{Aff}(k)$ est un produit semi-direct, calculer son ordre.
2. (a) Remarquer que $\sharp\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_4) = \sharp\mathfrak{A}_4$. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.
   (b) En (re)déduire l'existence d'un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$.
   (c) Trouver un cousin de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_4)$ isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
3. Soit p, q deux nombres premiers avec $p \mid q - 1$.
   (a) Calculer le commutateur de $x \mapsto ax$ et $x \mapsto x + d$. *On pourra utiliser des matrices.*
   (b) Montrer que l'unique groupe non-abélien d'ordre pq est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$.
   (c) Montrer $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$ contient un unique sous-groupe d'ordre pq.

6 Un non-isomorphisme exceptionnel

Exercice 10

1. Montrer que $\sharp\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4) = \sharp\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2) = 8!/2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \sharp\mathfrak{A}_8$.
2. Montrer que $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$ contient deux classes de conjugaisons d'éléments d'ordre 2.
3. Montrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ est l'image d'une transvection de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_4)$.
4. En déduire que $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4) \not\simeq \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$.
5. À qui $\mathfrak{A}_8$ a-t-il une chance d'être isomorphe ? *On ne demande pas de le montrer mais $\mathfrak{A}_8$ est bien isomorphe à ce candidat.*

7 Retour sur $\mathfrak{A}_5$

Exercice 11

Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple à l'aide du lemme d'Iwasawa. *On imagine que $\mathfrak{A}_5$ est parfait a déjà été montré.*