



Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°2 : Géométrie projective



Géométrie affine

Exercice 1

Soit \mathcal{E} un espace affine.

1. Montrer que deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux.
2. Montrer que si $\dim \mathcal{E} = 2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles.
3. Donner un exemple de deux droites de \mathbb{R}^3 disjointes et non-parallèles.

Exercice 2

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} , dirigés respectivement par F , G et E . On suppose que $F + G = E$. Montrer que tout sous-espace parallèle à \mathcal{G} rencontre \mathcal{F} .

Exercice 3

1. Montrer que l'image et l'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine. On pourra expliciter les directions.
2. Montrer que toute application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés.

Exercice 4

Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E et soit $n := \dim \mathcal{E}$. On dit que $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ forment un *repère affine* de \mathcal{E} si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E .

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Montrer que $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ forment un repère affine de \mathcal{E} si et seulement si A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.
2. Montrer que si une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ vérifie $f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ alors $f = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de \mathcal{E} forme un groupe.

Espace projectif

Exercice 6 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. On suppose $n \geq 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie).
3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*.
4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique dessin en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données. Expliquer la construction.

Exercice 7 (Droite projective réelle)

Justifier que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité \mathbb{S}^1 de \mathbb{R}^2 .

Exercice 8 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'on a une bijection (ensembliste)

$$\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k) \quad (1)$$

2. Dans (1), que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$?

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

3. Rappeler pourquoi $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité \mathbb{S}^n de k^{n+1} .
4. Montrer que ses espaces sont compacts et connexes par arcs.
5. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 .
6. Montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert.

Envoi à l'infini

Exercice 9 (Un peu de dessin)

Soit Δ un triangle d'un plan projectif réel. Représenter Δ après avoir envoyé à l'infini :

1. seulement un sommet ;
2. un côté ;
3. une droite rencontrant l'intérieur de Δ .

Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

4. seulement un sommet ;
5. seulement un côté ;
6. seulement une diagonale.

Exercice 10 (Théorème de Desargues)

Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

Exercice 11

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m . Soit $o \neq m$ un point de d_1 . Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 12 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k -espace vectoriel et soit $f \in \text{GL}(E)$. On pose $\phi := \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f , que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \text{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 13 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ une homographie.

1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.
2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.
3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 14 (Sur les groupes linéaires)

Soit E un k -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des homothéties de rapport $\lambda \in k^*$.
2. Montrer que le centre de $\mathrm{SL}(E)$ est le groupe des homothéties de rapport $\lambda \in \mu_n(k) = \{x \in k \mid x^n = 1\}$.
3. En déduire que $\mathrm{PSL}(E)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(E)$.

On suppose à présent que k est un corps fini de cardinal q .

4. Rappeler la formule calculant l'ordre de $\mathrm{GL}_n(k)$.
5. En déduire une formule pour les ordres de $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{PGL}_n(k)$. *On remarquera que $\#\mathrm{GL}_n(k) = \#\mathrm{PGL}_n(k)$.*
- ★ En déduire une formule pour l'ordre de $\mathrm{PSL}_n(k)$.

Exercice 15 (Quelques isomorphismes exceptionnels)

Soit E un k -espace vectoriel de dimension au moins 1.

1. Montrer qu'on a des morphismes de groupe $\mathrm{SL}(E) \rightarrow \mathrm{GL}(E) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{P}(E))$. Déterminer le noyau.
2. Rappeler les définitions de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$. Sur quel ensemble ces groupes agissent-ils naturellement ? Que dire de l'action des groupes sur $(\mathbb{P}(E))$?
3. Montrer les isomorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
4. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
5. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Il existe d'autres isomorphismes exceptionnels, voir Perrin fin du chapitre IV.

Exercice 16 (Constructions à la règle)

Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d .
2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N . Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ?

Exercice 17 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A', B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB) . On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives.

Exercice 18 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants.
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D .

Birapport

Exercice 19 (Division harmonique)

Soient A, B, C, D quatre points d'une droite affine réelle en division harmonique. Montrer qu'un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

Exercice 20 (Droites concourantes)

Soient (O, A, B, C) et (O, A', B', C') deux quadruplets de points distincts et alignés. Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

Exercice 21 (Quelques identités)

1. Trouver les homographies de $\mathbb{P}^1(k)$ qui fixent 1 et qui échangent 0 et ∞ .
2. En déduire une preuve sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$.
3. Prouver de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 22 (Moins de monde que prévu!)

On considère l'action de \mathfrak{S}_4 sur les quadruplets et soient a, b, c, d quatre points alignés.

1. Déterminer l'orbite du birapport $[a, b, c, d]$ sous l'action de \mathfrak{S}_4 .
2. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est en général le sous-groupe $V \subseteq \mathfrak{S}_4$ engendré par les doubles transpositions.

Exercice 23 (Une autre identité)

Soient a, b, m, n, p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité :

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

Droite projective complexe

Exercice 24 (Image de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}_{>0}^2$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$;
2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \text{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+i z}$;
3. l'image de $\{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0, 1[\times \mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.

Exercice 25 (Théorème des six birapports)

Soient $a, b, c, d, a', b', c', d'$ 8 points d'une droite projective.

1. Dessiner un cube en disposant les points $a, b, c, d, a', b', c', d'$ afin que les six faces du cubes soient :

$$\{a, b, c', d'\}, \{b, c, a', d'\}, \{c, a, b', d'\}, \{a', b', c, d\}, \{b', c', a, d\}, \{c', a', b, d\}.$$

2. Montrer l'égalité $[a, b, c', d'] [b, c, a', d'] [c, a, b', d'] [a', b', c, d] [b', c', a, d] [c', a', b, d] = 1$.
3. En déduire le Théorème de Miquel : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ tels que $\#\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+1} = 2$, pour $i = 1, \dots, 4$, on note ses deux points A_i, A'_i . Supposons que les non-prime et les prime sont au bon endroit. Les A_1, \dots, A_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points A'_1, \dots, A'_4 sont cocycliques ou alignés.
4. En déduire le Théorème de Simson : Soit ABC un triangle. Soit M un point du plan euclidien. On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites $(AB), (BC), (CA)$. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le circonscrit à ABC .

Voir l'exo III.34 du Audin pour une troisième application.

Exercice 26 (Automorphismes du disque)

Soit

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

le disque unité de \mathbb{C} . On appelle *automorphisme* de \mathbb{D} une bijection biholomorphe de \mathbb{D} dans lui-même.

1. On rappelle une version du lemme de Schwarz : si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, fixe 0 et vérifie $|f| \leq 1$ alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, s'il existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors f est une rotation. Montrer que tout automorphisme de \mathbb{D} qui fixe 0 est une rotation.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$ est un automorphisme de \mathbb{D} .
3. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, trouver une homographie qui préserve \mathbb{D} et qui envoie w sur 0.
4. En déduire que tout automorphisme de \mathbb{D} est une homographie, dont on précisera la forme.
5. Trouver une homographie qui envoie \mathbb{D} sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\text{Im} > 0\} \subseteq \mathbb{C}$.
6. En déduire que tout automorphisme de \mathbb{H} est une homographie de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 27 (Quadrique projective)

Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et soit q une forme quadratique sur E . On appelle *quadrique associée à q* le sous-ensemble de $\mathbb{P}(E)$ défini par

$$Q := \pi\left(\{x \in E \setminus \{0\} : q(x) = 0\}\right),$$

où $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ est la projection canonique.

1. Montrer que Q est bien définie.
2. On suppose $\dim E = 2$. Montrer que si Q contient au moins trois points alors $Q = \mathbb{P}(E)$.
3. On suppose $\dim E = 3$. Montrer que si Q contient une droite d alors $Q = \mathbb{P}(E)$ ou $Q = d \cup d'$ où d' est une droite de $\mathbb{P}(E)$.
4. Soit d une droite de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que si d rencontre Q en au moins trois points alors $d \subseteq Q$.
5. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que Q rencontre chaque droite de $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 28

Soient $p < x < y < q \in \mathbb{R}$. Soient $r, s \geq 0$.

1. Montrer l'inégalité suivante :

$$[p : q : x : y] \leq [p - r : q + s : x : y]$$

2. Caractériser le cas d'égalité.
3. Soit $x < z < y$, montrer l'inégalité :

$$[p : q : x : z] < [p : q : x : y]$$

Exercice 29

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^2 . On va définir la *distance de Hilbert* sur Ω . Soient $x, y \in \Omega$. On note p, q les points d'intersection de (xy) avec $\partial\Omega$. En supposant p, x, y, q alignés dans cet ordre. On pose :

$$d(x, y) = \ln([p : q : x : y])$$

On va montrer que d est une distance.

1. Montrer la symétrie et la séparation.
2. Soient x, y, z trois points de Ω tel que $z \in [xy]$ alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$
3. Soient x, y, z trois points de Ω . Faites une figure avec beaucoup de droites. Montrer l'inégalité triangulaire.
4. Montrer que les boules fermées sont des convexes compacts.
5. Montrer que si Ω est strictement convexe alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ entraîne que $z \in [x, y]$.