UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°1 bis : Les bases de la théorie des groupes (supplément maison)

Action de groupe

Exercice 18 (Des petites questions)

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble X.

1. Montrer qu'un sous-ensemble de X est stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.

2. Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.

3. Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.

4. Soit E un ensemble et $Y = \{f : X \to E\}$ l'ensemble des applications de X vers E. Montrer que les formules suivantes $(g * f)(x) = f(g \cdot x)$ et $(g \odot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ définissent une action à droite et une action à gauche.

Exercice 19 (Coloriages du diamant*)

Combien existe-il de coloriages différents, avec deux couleurs, de cette pyramide double à base carré, que nous appelerons "diamant" ? C'est le but de cet exercice.

Précisons que les faces sont isocèles mais pas équilatérales et qu'on identifiera deux façons de colorier si elles coïncident quitte à déplacer le diamant.

On considère le groupe D des isométries qui conservent globalement le diamant et son action naturelle sur le diamant.

1. Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un sommet A. En déduire le cardinal de D.

2. Déterminer la liste des éléments de D.

3. Calculer le nombre de façons de colorier le diamant.

4. On fait agir le groupe D de façon naturelle sur l'ensemble de ces façons de colorier. A quoi correspond en termes de cette action de groupe le nombre de coloriages différents ?

5. Calculer le nombre de façons de colorier fixées par chaque élément du groupe D.

6. Conclure.

Exercice 20 (Action par translation sur G/H)

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche.

1. Montrer que cette action est transitive.

2. Identifier le stabilisateur de la classe xH.

3. En déduire le noyau de cette action.

4. *Application 1 :* Supposons G fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice p.

- Montrer que les orbites de l'action de H sont réduites à des points.
- En déduire que H est distingué.

5. *Application 2 :* Montrer qu'un groupe infini qui possède un sous-groupe d'indice fini n'est pas simple.

Théorème de Sylow et produit semi-direct

Exercice 21

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 22

1. Soit G un groupe, a et b deux éléments d'ordre fini qui commutent. On suppose que les sous-groupes engendrés $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ ont une intersection réduite au singleton élément neutre $\{e\}$.

(**a.**) Montrer qu'une égalité $(ab)^m = e$ implique $a^m = e$ et $b^m = e$.

(**b.**) Calculer l'ordre de ab.

2. Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton élément neutre.

3. Retrouver que tout groupe abélien d'ordre 77 est cyclique.

Exercice 23

Soit p un nombre premier. On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \varphi(n)$ et en déduire que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

2. On suppose $p \geqslant 3$.

(**a.**) Soient a, b deux éléments d'un groupe G qui commutent et qui d'ordre m et n premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre mn. Le résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont plus supposés premiers entre eux ?

(**b.**) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $(1+p)^{p^k} = 1 + \lambda p^{k+1}$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$ premier à p.

(**c.**) Si $\alpha \geqslant 2$, en déduire que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/\varphi(p^\alpha)\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$. On pourra considérer le morphisme naturel $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Petits groupes

Exercice 24 (Groupes d'ordre $2p$)

Soient p un nombre premier impair et G un groupe à $2p$ éléments.

1. Montrer que G possède un élément r d'ordre p et un élément s d'ordre 2.

2. Montrer que $G = \langle r, s \rangle$ et que $\langle r \rangle$ est distingué dans G.

3. Montrer que le groupe $Aut(\langle r \rangle)$ des automorphismes de $\langle r \rangle$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$. En déduire que $Aut(\langle r \rangle)$ contient un unique élément d'ordre 2.

4. En déduire que $srs^{-1} = r$ ou $srs^{-1} = r^{-1}$ puis que G est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou groupe diédral $\mathbb{D}_p$.

5. En déduire que $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à $\mathbb{D}_3$.

6. En déduire la classification des groupes d'ordre $6, 10, 14, 22, \ldots$.

Exercice 25 (Groupes d'ordre 8)

1. Lister les groupes abéliens d'ordre 8.

2. Soit G un groupe non abélien d'ordre 8. Montrer que G possède un élément a d'ordre 4 et aucun élément d'ordre 8.

3. Montrer que $\langle a \rangle$ est distingué dans G.

4. Soit $b \notin \langle a \rangle$, montrer que si l'ordre de b est 2 alors $bab^{-1} = a^{-1}$.

5. En déduire que ou bien G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_4$ ou bien tous les éléments de $G \smallsetminus \langle a \rangle$ sont d'ordre 4.

6. En supposant que G vérifie la seconde hypothèse, montrer que G possède 6 éléments d'ordre 4 et un élément d'ordre 2.

7. En déduire que G est isomorphe au groupe $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$.

Exercice 26 (Groupes d'ordre 12)

Soit G un groupe d'ordre 12. On note s_p le nombre de p-Sylow de G.

1. Faire la liste des groupes abéliens d'ordre 12.
2. Montrer que $s_2 = 1$ ou 3.
3. Montrer que $s_3 = 1$ ou 4.
4. Montrer que $s_2 = 3$ et $s_3 = 4$ est impossible.
5. On suppose à présent G non abélien et $s_2 = 1$, montrer que $s_3 = 4$ et que G est un produit semi-direct d'un groupe d'ordre 4 par un groupe d'ordre 3. Montrer que le 2-Sylow de G n'est pas cyclique.
6. On REsuppose G non abélien et $s_2 = 1$, mais on procède différemment. Trouver morphisme de G vers $\mathfrak{S}_4$ via une action transitive sur 4 objets. Montrer que cette action est fidèle. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
7. On suppose à présent G non abélien et $s_3 = 1$. En déduire que $s_2 = 3$ et que G est un produit semi-direct d'un sous-groupe N d'ordre 3 par un sous-groupe K d'ordre 4.
8. En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{D}_6 = \mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ou à l'unique produit semi-direct non-trivial $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$.
9. Conclusion : faire la liste des 5 groupes d'ordre 12.

Exercice 27 (Groupes d'ordre pq^β)

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et $\beta \geqslant 1$ un entier. Soit G un groupe d'ordre pq^β.

1. Montrer que le q-Sylow S de G est unique.
2. Montrer que G est un produit semi-direct entre S et un autre groupe.

Groupes symétriques et alternés

Exercice 28 (Étude de $\mathfrak{S}_4$)

1. Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature.
2. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$.
3. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ n'est pas un groupe simple.
4. Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$.
5. Déterminer des suites de compositions avec des facteurs abéliens de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 29

1. Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les carrés est égal au groupe $\mathfrak{A}_n$.
2. En déduire (une nouvelle fois, cf exo 11) que $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

Résolubilité

Exercice 30

Soit G un groupe.

1. Montrer que R, S sont des sous-groupes résolubles G avec $R \triangleleft G$ alors RS est résoluble.
2. En déduire que tout groupe fini possède un unique sous-groupe $\mathcal{R}(G)$ normal résoluble et maximal pour ces propriétés.
3. Montrer que $G/\mathcal{R}(G)$ n'a pas de sous-groupe normal et résoluble.