UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°1 : Les bases de la théorie des groupes

Action de groupe

Exercice 1 (Application des formules de comptage)

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E.

1. On suppose que l'ordre de G est 15, que le cardinal de E est 17 et que E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles.
2. Montrer que toute action d'un groupe d'ordre $143 = 11 \cdot 13$ sur un ensemble de cardinal 25 possède un point fixe.

Exercice 2 (Théorème de Cauchy)

Montrer le théorème de Cauchy : Tout groupe fini d'ordre divisible par un nombre premier p possède un élément d'ordre p. *On pourra faire agir par permutation circulaire le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ de G tels que $x_1 \cdots x_p = 1$.*

Exercice 3 (Sur la transitivité multiple)

Soit k un entier et X un ensemble de cardinal au moins k. On dit qu'une action est k-transitive lorsque pour tout $x_1, ..., x_k \in X$ distincts et tout $y_1, ..., y_k \in X$ distincts, il existe un $g \in G$ tel que $g \cdot x_i = y_i$ pour $i = 1, ..., k$. On suppose que $k \geqslant 2$.

1. Montrer qu'une action est k-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action du stabilisateur de tout point $x \in X$ sur $X \setminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive.
2. Montrer qu'une action est k-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action d'un stabilisateur d'un point $x \in X$ sur $X \setminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive.

Exercice 4 (Autour des p-groupes)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que le centre d'un p-groupe[1] G, n'est pas réduit à l'élément neutre.
2. Montrer que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre.
3. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien. En déduire la liste des groupes d'ordre p^2.
4. Montrer que le centre Z d'un groupe non abélien G d'ordre p^3 est d'ordre p et $G/Z \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
5. En déduire que $D(G) = Z$.

Exercice 5 (Lemme du Ping-Pong)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soit E_1 et E_2 deux parties non vides et disjointes de E. Soit g et h deux éléments de G tels que toute puissance (positive ou négative) de g envoie tout élément de E_1 dans E_2 et toute puissance de h envoie tout élément de E_2 dans E_1.

1. Montrer que les mots de la forme $g^{k_1} h^{l_1} g^{k_2} h^{l_2} \cdots g^{k_d} h^{l_d} g^{k_{d+1}}$ ne sont pas égaux à l'élément neutre e_G avec $k_i, l_j \neq 0$.
2. En déduire en utilisant une conjugaison, montrer qu'aucun mot du groupe engendré par g et h autre que le mot vide n'est égal à l'élément neutre. On dit alors que le groupe engendré par g et h est un groupe libre.

1. i.e. un groupe fini d'ordre une puissance non nulle de p.

3. Montrer le sous groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est libre, en considérant l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$ et les domaines $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| < |y|\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| > |y|\}$ délimités par les diagonales.

Inclassable

Exercice 6

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps (commutatif) est cyclique.

Théorème de Sylow et produit semi-direct

Exercice 7

Soient $p < q$ deux nombres premiers. Soit G un groupe d'ordre pq.

1. Montrer que $s_q = 1$ où le nombre s_q est le nombre de q-Sylow de G.
2. En déduire que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $p \nmid q-1$ alors G est cyclique.
4. Montrer que si $p|q-1$ alors il existe à isomorphisme près deux groupes d'ordre pq : le groupe cyclique d'ordre pq et le groupe non-abélien d'ordre pq. (Remarque : le groupe diédral est l'exemple le plus simple du second cas.)

Exercice 8 (Groupes d'ordre p^2q)

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. Nous allons montrer que tout groupe G d'ordre p^2q n'est pas simple. On note s_q le nombre de q-Sylow de G.

1. Montrer que si $s_q \neq 1$ alors $p^2 \equiv 1[q]$.
2. En déduire qu'alors $p = 2$ et $q = 3$, ce cas est traité dans l'exercice 24 de la feuille TD 1 Bis maison.
3. Montrer que si $p \neq 2$ ou $q \neq 3$, alors G n'est pas simple et est le produit semi-direct d'un p-Sylow et d'un q-Sylow.

Groupes symétriques et alternés

Exercice 9 ($\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6)

Soit H un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$.

1. Montrer que pour tout $g \in \mathfrak{A}_4$, on a $g^2 \in H$.
2. En déduire que H contient tous les 3-cycles.
3. Conclure (éventuellement de deux manières...).

   La réciproque au Théorème de Lagrange est donc fausse. Il s'agit du plus petit contre-exemple.

Exercice 10 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)

1. Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature.
2. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$. Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.
3. Trouver une suite de compositions avec des facteurs abéliens de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11

1. Soit $f : \mathfrak{S}_n \to A$ un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers un groupe abélien. Démontrer que les transpositions ont toutes la même image. Si $A = \mathbb{C}^\times$, en déduire que l'image d'une transposition est ± 1 et finalement que f est soit constante soit la signature.
2. Soit G d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué puis que $G = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 12 (Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$)

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ (pour $n \geqslant 5$).

1. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$.
2. On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que dans ce cas que tous les éléments de H sont dans le centre de $\mathfrak{S}_n$ et en déduire que $H = \{\mathrm{Id}\}$.
3. On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.
4. Conclure : si $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$..

Exercice 13

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathfrak{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

1. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$.
2. Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
3. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$.
4. Montrer que $V_4 \subset D(\mathfrak{A}_4)$.
5. Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et que le quotient $\mathfrak{A}_4/V_4$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathfrak{A}_4) \subset V_4$.
6. En déduire $D^2(\mathfrak{S}_4)$.
7. Calculer les autres groupes dérivés de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 14

1. Soit $n \geqslant 5$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe distingué strict non trivial de $\mathfrak{S}_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Montrer que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Résolubilité

Exercice 15 Groupe triangulaire supérieur

1. Montrer que le groupe de Heisenberg H des matrices 3×3 triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est résoluble.
2. Montrer que le groupe B des matrices triangulaires supérieures 3×3 inversibles est résoluble.

   Bien entendu, le résultat est aussi vrai pour les matrices triangulaires $n \times n$.

Exercice 16

Soit G un groupe fini. Montrer l'alternative suivante : G contient un sous-groupe normal non-trivial abélien ou bien G contient un sous-groupe normal non-trivial parfait (i.e $H = D(H)$).

Exercice 17

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout groupe d'ordre impair est résoluble.
2. Tout groupe fini simple non-abélien est d'ordre pair.

Le théorème de Feit-Thompson (1962) montrent qu'elles sont vraies.