Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°4 : Décomposition dans le groupe linéaire et Groupes orthogonaux euclidiens

1 Sur le groupe orthogonal

Exercice 1

Montrer que tout élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est dans une b.o.n de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& R_{\theta_1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En déduire que tout élément de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est dans une b.o.n.d de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& R_{\theta_1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On note Sym_n^{++} le cône des matrices définies positives de taille $n \times n$. Montrer que l'application $M \mapsto M^2$ est une bijection de Sym_n^{++} dans lui-même.

Exercice 3

Classifier les sous-groupes finis puis les sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

2 Décompositions dans le groupe linéaire

Exercice 4 (Décomposition de Bruhat)

Soit k un corps et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de k^n. À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe l'endomorphisme p_σ de k^n donné sur la base précédente par $p_\sigma(e_i) \coloneqq e_{\sigma(i)}$. On note P_σ la matrice de p_σ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

1. Montrer que $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(k)$.
2. Déterminer le coefficient (i, j) de P_σ.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ via l'application $\sigma \mapsto P_\sigma$.

Soit $\mathrm{T}_n(k) \leqslant \mathrm{GL}_n(k)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On considère l'action par équivalence de $\mathrm{T}_n(k) \times \mathrm{T}_n(k)$ sur $\mathrm{GL}_n(k)$, donnée par $(M, N) \cdot A \coloneqq MAN^{-1}$. On veut montrer que chaque orbite contient une unique matrice P_σ.

4. Rappeler pourquoi $\mathrm{T}_n(k)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$.

TSVP →

5. Rappeler pourquoi faire une opération sur les lignes ou les colonnes revient à multiplier par une certaine matrice triangulaire.
6. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(k)$. En considérant le dernier coefficient non nul de la première colonne de A, montrer qu'il existe $T, T' \in \mathrm{T}_n(k)$ telles que TAT' soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

7. En déduire que chaque orbite possède au moins une matrice de la forme P_σ.
8. En utilisant l'équivalence de deux certaines matrices triangulaires supérieures, montrer que si P_σ et P_τ sont dans la même orbite alors $\sigma = \tau$.
9. Conclure.

Exercice 5 (Décomposition LU)

En utilisant la question 5 de l'Exercice 4, montrer que toute matrice dont les mineurs principaux sont non nuls peut s'écrire de façon unique comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice unitriangulaire supérieure.

Exercice 6 (Décomposition de Gram-Schmidt, QR ou Iwasawa selon les goûts)

En utilisant l'indice donné par le nom de l'exercice, montrer que toute matrice inversible peut s'écrire comme produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure. Montrer que cette décomposition est un homéomorphisme.

Groupes de réflexions

Exercice 7

Soit v dans $\mathbb{R}^n$ euclidien. Donner l'expression de la réflexion d'hyperplan $v^\perp$.

Exercice 8

Montrer que le groupe diédral est engendré par deux réflexions.

Exercice 9

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note $s_i \coloneqq (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$.

1. Rappeler pourquoi $\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$.
2. Vérifier que les relations suivantes sont vérifiées :

$$s_i^2 = 1, \qquad s_i s_j = s_j s_i, \text{ si } |i-j| > 1, \qquad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note r_i la réflexion d'hyperplan $(e_i - e_j)^\perp$. Montrer que $r_1, \dots, r_{n-1}$ vérifient les relations précédentes.