Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2
Une heure

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Tous les documents sont interdits.

Questions de cours

Soit k un corps et $n \geqslant 1$ un entier.

1. Soient D, D' deux droites distinctes du plan projectif $k\mathbb{P}^2$. Montrer que D et D' se rencontrent en un unique point.

On suppose maintenant k fini.

2. Donner et démontrer une formule donnant le nombre de points de l'espace projectif $k\mathbb{P}^n$ de dimension n.

3. Donner et démontrer une formule donnant le nombre de droites du plan projectif $k\mathbb{P}^2$.

4. Donner et démontrer une formule donnant l'ordre de $\mathrm{GL}_n(k)$.

5. Donner et démontrer une formule donnant l'ordre de $\mathrm{PGL}_n(k)$. *(On admettra que le centre de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *est formé des matrices scalaires inversibles.)*

Exercice 1

Soit $q \geqslant 2$ une puissance d'un nombre premier et soit $\mathbb{F}_q$ le corps de cardinal q.

1. Construire un morphisme injectif $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$. *Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice précédent.*

On suppose maintenant $q = 5$.

2. En déduire proprement que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$. *On pourra utiliser librement le résultat suivant*[1] *: tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.*

3. En déduire qu'il existe un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ qui n'est pas conjugué au stabilisateur de 6 pour l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\{1, \ldots, 6\}$.

4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Notation pour l'exo 2 et l'exo 3. Soient A, B, C trois points distincts alignés d'un plan affine sur un corps k.

- On note $\frac{AC}{AB}$ l'unique élément $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ tel que l'homothétie h de centre A et de rapport λ vérifie $h(B) = C$.

1. Cf. exo 3, CC1 ou exo 17, TD 1

- On complète le plan affine en un plan projectif. Soit $\mathcal{D} = (AB) \cup \{\infty_{(AB)}\}$ la droite projective d'hyperplan affine la droite (AB) et de point à l'infini $\infty_{(AB)}$. Si $D \in \mathcal{D}$, le birapport $[A, B, C, D]$ est le point $f(D) \in k\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ où $f : \mathcal{D} \to k\mathbb{P}^1$ est l'(unique) homographie qui envoie A sur ∞, B sur 0 et C sur 1.

Exercice 2

Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés d'un plan affine.

1. Montrer que :
$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{BC}$$

2. Montrer que :
$$[A, B, C, \infty_{(AB)}] = \frac{CA}{CB}$$

Exercice 3

Soit ABC un triangle d'un plan projectif. Soient d', d'' deux droites quelconques ne passant pas par A, B ou C. On note $A' = (BC) \cap d'$, $B' = (CA) \cap d'$, $C' = (AB) \cap d'$ et $A'' = (BC) \cap d''$, $B'' = (CA) \cap d''$, $C'' = (AB) \cap d''$.

1. Faire un dessin.

2. Montrer que :
$$[A, B, C', C''] \times [B, C, A', A''] \times [C, A, B', B''] = 1$$

Indication : on pourra faire en sorte que les droites d' et d'' soient parallèles puis utiliser le théorème de Thalès et l'exo 2.

3. En déduire le Théorème de Menelaüs - sens direct **et** en faire un dessin :
Soit ABC un triangle d'un plan affine. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ avec $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \varnothing$. Si les points A', B' et C' sont alignés alors on a l'égalité :
$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

4. À l'aide du Théorème de Menelaüs - sens direct, montrer la réciproque du Théorème de Menelaüs - sens direct : si $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$ alors A', B' et C' sont alignés.