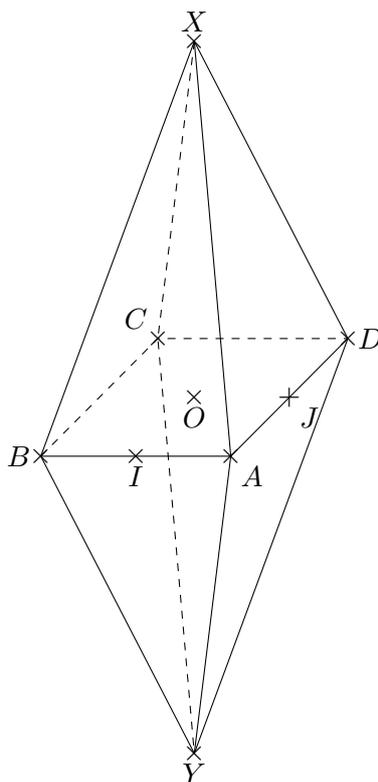


Coloriages du diamant

Correction du TD 1 exercice 6

Salim Rostam



Notations.

- Si E et F sont deux points distincts, on note r_{EF} le quart de tour (dans le sens direct) d'axe (EF) . On a alors deux autres rotations : un quart de tour dans l'autre sens r_{EF}^{-1} et un demi-tour r_{EF}^2 .
- Si E, F et G sont trois points non alignés, on note s_{EFG} la symétrie orthogonale par rapport au plan (EFG) .

1 Coloriages par isométries

Soit \mathcal{D} le sous-groupe des isométries de \mathbb{R}^3 qui conserve globalement le diamant, c'est-à-dire, qui stabilise l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D, X, Y\}$. Par le théorème de classification des isométries vectorielles, le sous-groupe \mathcal{D} est engendré par des rotations par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité O de \mathcal{D} et des symétries orthogonales dont le plan de symétrie passe par O .

1. Remarquons que le groupe \mathcal{D} stabilise O et conserve les distances. On répond à la question avec deux points de « type » différent pour s'assurer du résultat. Puisque \mathcal{D} agit sur les

sommets du diamant, la relation orbite–stabilisateur donne $\#\mathcal{D} = \#(\mathcal{D} \cdot E)\#\mathcal{D}_E$ pour chaque sommet E .

Avec le sommet X La distance OX étant conservée, le sommet X ne peut aller qu'en X ou en Y donc $\mathcal{D} \cdot X = \{X, Y\}$. Les éléments du stabilisateurs fixent la droite (XY) et induisent donc une isométrie du plan (ABC) . Les isométries vectorielles du plan étant les rotations et les symétries axiales, on en déduit que les éléments de \mathcal{D}_X sont soit des rotations par rapport à (XY) soit des symétrie par rapport à un plan qui contient cet axe. On a donc $\mathcal{D}_X = \{\text{id}, r_{XY}^\pm, r_{XY}^2, s_{XAY}, s_{XBY}, s_{XIY}, s_{XJY}\}$. On trouve $\#\mathcal{D} = 2 \times 8 = 16$.

Avec le sommet A De la même façon, on trouve $\#\mathcal{D} = 4 \times 4 = 16$ puisque $\mathcal{D} \cdot A = \{A, B, C, D\}$ et $\mathcal{D}_A = \{\text{id}, r_{AC}, s_{XAY}, s_{ABC}\}$.

2. La symétrie s_{ABC} envoie X sur Y . Ainsi, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X \sqcup s_{ABC}\mathcal{D}_X$ et on peut lister les éléments de \mathcal{D} :

$$\begin{array}{cccc} \text{id}, & r_{XY}, & r_{XY}^{-1}, & r_{XY}^2, \\ s_{XAY}, & s_{XBY}, & s_{XIY}, & s_{XJY}, \\ s_{ABC}, & s_{ABC}r_{XY}, & s_{ABC}r_{XY}^{-1}, & s_{ABC}r_{XY}^2, \\ s_{ABC}s_{XAY} = r_{AC}^2, & s_{ABC}s_{XBY} = r_{BD}^2, & s_{ABC}s_{XIY} = r_{IO}^2, & s_{ABC}s_{XJY} = r_{JO}^2. \end{array}$$

3. Pour chaque face on doit choisir les deux couleurs, le diamant à 8 faces donc il y a 2^8 coloriages possibles.
4. Le groupe \mathcal{D} agissant sur les faces du diamant (c'est bien le cas, encore une fois car les distances sont conservées), on en déduit une action de \mathcal{D} sur l'ensemble des coloriages. Deux coloriages sont dans la même orbite si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en appliquant une isométrie (donc un élément de \mathcal{D}), on est donc intéressé par le *nombre d'orbites*.
5. Soit $g \in \mathcal{D}$. On vient de voir que l'isométrie g permute les faces du diamant. Décomposons g , vu comme permutation des faces du diamant, en produit de cycles à supports disjoints $g = c_1 \cdots c_s$. Si $c_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,l_i})$, alors un coloriage est fixé par g si et seulement si pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$ les faces $\{f_{i,j} : j \in \{1, \dots, l_i\}\}$ ont la même couleur. On en déduit que pour qu'un coloriage soit fixé par g il faut et il suffit de choisir la couleur des $f_{i,1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, d'où $\#\text{Fix}(g) = 2^s$. On reprend donc les éléments listés dans la question 2, et on numérote les faces du diamant de la sorte :

$$\begin{array}{cccc} 1 : ABX, & 2 : BCX, & 3 : CDX, & 4 : DAX, \\ 1' : ABY, & 2' : BCY, & 3' : CDY, & 4' : DAY. \end{array}$$

Pour connaître l'image d'une face, on regarde l'image de ses trois sommets.

g	décomposition en cycle vu comme permutation des faces	$\#\text{Fix}(g)$
id	(1) (2) (3) (4) (1') (2') (3') (4')	2^8
r_{XY}	(1234) (1'2'3'4')	2^2
r_{XY}^{-1}	(4321) (4'3'2'1')	2^2
r_{XY}^2	(13) (24) (1'3') (2'4')	2^4
s_{XAY}	(14) (23) (1'4') (2'3')	2^4
s_{XBY}	(12) (34) (1'2') (3'4')	2^4
s_{XIY}	(1) (24) (3) (1') (2'4') (3')	2^6
s_{XJY}	(13) (2) (4) (1'3') (2') (4')	2^6
s_{ABC}	(11') (22') (33') (44')	2^4
$s_{ABC}r_{XY}$	(12'34') (1'23'4)	2^2
$s_{ABC}r_{XY}^{-1}$	(43'21') (4'32'1)	2^2
$s_{ABC}r_{XY}^2$	(13') (24') (1'3) (2'4)	2^4
r_{AC}^2	(14') (23') (1'4) (2'3)	2^4
r_{BD}^2	(12') (21') (34') (43')	2^4
r_{IO}^2	(11') (24') (33') (42')	2^4
r_{JO}^2	(13') (22') (31') (44')	2^4

6. Pour calculer le nombre d'orbites, et donc le nombre de coloriage comme montré dans la question 4, on utilise le lemme de Burnside :

$$\begin{aligned}
 \text{nombre d'orbites} &= \frac{1}{\#\mathcal{D}} \sum_{g \in \mathcal{D}} \#\text{Fix}(g) \\
 &= \frac{1}{16} \left(2^8 + 2 \cdot 2^6 + 9 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2^4} \left(2^8 + 2^7 + 9 \cdot 2^4 + 2^4 \right) \\
 &= 2^4 + 2^3 + 9 + 1 \\
 &= 34,
 \end{aligned}$$

donc il y a 34 coloriages du diamant à isométrie près.

2 Coloriages par isométries directes

On ne s'autorise ici à identifier deux coloriages que s'ils sont dans la même orbite de $\mathcal{D}_d := \mathcal{D} \cap \{\text{isométrie directes de } \mathbb{R}^3\}$. On oublie donc les symétries orthogonales, ainsi que les symétries-rotations. Puisque \mathcal{D} contient une isométrie indirecte, le sous-groupe $\mathcal{D}_d \subseteq \mathcal{D}$ est d'indice 2 (c'est le noyau du déterminant) donc de cardinal 8, et la liste des éléments de \mathcal{D}_d est

alors :

$$\text{id, } r_{XY}, r_{XY}^{-1}, r_{XY}^2, \\ r_{AC}^2, r_{BD}^2, r_{IO}^2, r_{JO}^2.$$

On supprime alors les lignes en trop dans le tableau de la question 5, ce qui donne :

g	décomposition en cycle vu comme permutation des faces	$\#\text{Fix}(g)$
id	(1) (2) (3) (4) (1') (2') (3') (4')	2^8
r_{XY}	(1234) (1'2'3'4')	2^2
r_{XY}^{-1}	(4321) (4'3'2'1')	2^2
r_{XY}^2	(13) (24) (1'3') (2'4')	2^4
r_{AC}^2	(14') (23') (1'4) (2'3)	2^4
r_{BD}^2	(12') (21') (34') (43')	2^4
r_{IO}^2	(11') (24') (33') (42')	2^4
r_{JO}^2	(13') (22') (31') (44')	2^4

puis par le lemme de Burnside :

$$\begin{aligned} \text{nombre d'orbites} &= \frac{1}{\#\mathcal{D}_d} \sum_{g \in \mathcal{D}_d} \#\text{Fix}(g) \\ &= \frac{1}{8} (2^8 + 5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2) \\ &= \frac{1}{2^3} (2^8 + 5 \cdot 2^4 + 2^3) \\ &= 2^5 + 5 \cdot 2 + 1 \\ &= 43, \end{aligned}$$

donc il y a 43 coloriages du diamant à isométrie directe près.