UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Théorie des Groupes et Géométrie**

*Contrôle Continu n°2 :*
*Groupes et Géométrie*
*Une heure*

**Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.**

## Questions de cours

*On justifiera avec soin chaque réponse.*

1. (a) *Retrouver le cardinal de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Commençons par calculer $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$. On a $3^2-1$ choix pour le premier vecteur colonne (un vecteur non nul de $\mathbb{F}_3^2$), et pour le deuxième il nous reste $3^2-3$ choix puisque l'on veut un vecteur qui ne soit pas proportionnel au premier. On a donc $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) = (3^2-1)(3^2-3) = 3(3-1)^2(3+1)$.

Calculons maintenant le cardinal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{F}_3^\times$ est un morphisme surjectif de noyau $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, donc par le premier théorème d'isomorphisme on obtient $\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \frac{\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)}{\#\mathbb{F}_3^\times} = 3(3-1)(3+1)$. Finalement, par définition on obtient le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ en divisant le cardinal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ par celui de son centre, c'est-à-dire par le nombre de $\lambda \in \mathbb{F}_3^\times$ de carré 1. Ici les deux éléments de $\mathbb{F}_3^\times = \{-1, 1\}$ sont de carré 1, donc on en déduit que

$$\#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) = \frac{\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)}{2} = 3(3+1) = 12.$$

(b) *En faisant agir fidèlement* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ *sur un ensemble à quatre éléments, montrer que* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.

On sait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ agit sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_3^2$, c'est-à-dire sur $\mathbb{P}(\mathbb{F}_3^2) = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$. On a $\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3) = 3+1 = 4$ (rappelons que l'on peut obtenir ce cardinal en utilisant le fait que l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ est transitive, le stabilisateur d'une droite étant de la forme $\{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & * \\ 0 & *\end{smallmatrix}\right)\}$ donc de cardinal $(\#\mathbb{F}_3^\times)^2\#\mathbb{F}_3 = 3(3-1)^2$) donc on obtient un morphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$. Son noyau est le centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, donc (par définition de PSL) on obtient une injection $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$. D'après la question (a), le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$, c'est donc $\mathfrak{A}_4$ (en effet, ce sous-groupe est distingué car d'indice 2 et on conclut puisque la surjection canonique $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nécessairement la signature donc est de noyau $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$).

2. *Soient $x, y, z, t$ quatre points distincts d'une droite projective. Montrer que $[x, y, t, z] = [x, y, z, t]^{-1}$ (on pourra par exemple utiliser la formule explicite du birapport).*

Notre convention pour l'écriture $[x, y, z, t]$ est $x$ va sur $\infty$, $y$ va sur 0 et $z$ sur 1.

**Première solution** La formule explicite donne

$$\begin{aligned}
[x, y, t, z] &= \frac{z-y}{t-y} \Big/ \frac{z-x}{t-x} \\
&= \frac{(t-x)(z-y)}{(t-y)(z-x)} \\
&= \frac{(z-y)(t-x)}{(z-x)(t-y)} \\
&= \left(\frac{(z-x)(t-y)}{(z-y)(t-x)}\right)^{-1} \\
&= [x, y, z, t]^{-1},
\end{aligned}$$

et on vérifie que tout se passe bien quand $x, y, z$ ou $t$ vaut l'infini (cette vérification est en fait nécessaire seulement quand $k = \mathbb{F}_3$, en effet sinon la droite projective contient au moins un cinquième point et on peut composer le birapport par une homographie qui envoie ce cinquième point à l'infini).

**Deuxième solution** Soit $f$ l'(unique) homographie qui envoie $x$ sur $\infty$, $y$ sur 0 et $z$ sur 1. Alors $f(t) \neq \infty$ et l'application $g := f(t)^{-1}f$ est une homographie qui envoie $x$ sur $\infty$, $y$ sur 0 et $t$ sur 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}[x, y, t, z] &= g(z) \\ &= f(t)^{-1}f(z) \\ &= f(t)^{-1} \\ &= [x, y, z, t]^{-1}.\end{aligned}$$

## Exercice 1

*Soit $k$ un corps. Une* involution *de $\mathbb{P}^1(k)$ est une homographie $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$ telle que $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$.*

1. *Montrer qu'une homographie $g$ de $\mathbb{P}^1(k)$ est une involution si et seulement s'il existe $p \neq q \in \mathbb{P}^1(k)$ tels que $g(p) = q$ et $g(q) = p$.*

   Tout d'abord, si $g$ est une involution de $\mathbb{P}^1(k)$ alors puisque $g$ n'est pas l'identité il existe $p$ tel que $q := g(p) \neq p$. Mais $g^2 = \mathrm{Id}$ donc $g(q) = g^2(p) = p \neq q$. Montrons maintenant la réciproque ; soit $g$ une homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ telle qu'il existe $p \neq q$ avec $g(p) = q$ et $g(q) = p$. En particulier, on a $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$.

   **Première solution, version algèbre linéaire** Les deux points distincts $p$ et $q$ de $\mathbb{P}^1(k)$ correspondent à deux droites distinctes de $k^2$. Par hypothèse, l'élément de $\mathrm{GL}(k^2)$ associé à $g$ permute ces deux droites, donc sa matrice dans une base adaptée est de la forme $M := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (on remarque que deux vecteurs non nuls distincts et non colinéaires de $k^2$ forment une base). Mais alors $M^2 = \alpha\beta I_2$ donc $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$ donc $g$ est une involution.

   **Deuxième solution, version projectif** Si $g(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{P}^1(k) \setminus \{p, q\}$ alors c'est gagné (on a bien $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)} \neq g$). Supposons maintenant qu'il existe $r \in \mathbb{P}^1(k) \setminus \{p, q\}$ tel que $g(r) \neq r$ et montrons que $g^2(r) = r$. Remarquons que l'on a nécessairement $g(r) \notin \{p, q\}$ (si $g(r) \in \{p, q\}$ alors on obtient $r \in \{p, q\}$ en appliquant $g^{-1}$). Soit maintenant $f$ l'homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ qui envoie $p$ sur $\infty$, $q$ sur 0 et $r$ sur 1. Les points $p, q, r, g(r)$ sont des points de la droite projective $\mathbb{P}^1(k)$ deux à deux distincts donc on peut considérer le birapport $[p, q, r, g(r)]$. Par définition, ce birapport est égal à $f(g(r))$, et en composant par l'homographie $g$ on obtient (les homographies conservent le birapport)

   $$[p, q, r, g(r)] = [q, p, g(r), g^2(r)].$$

   En raisonnant comme dans la deuxième solution de la question 2 des questions de cours, on voit que l'homographie $\frac{f(g(r))}{f}$ envoie $q$ sur $\infty$, $p$ sur 0 et $g(r)$ sur 1 (remarquons que $f(g(r)) \neq \infty$ puisque $g(r) \neq p$). Ainsi, on a

   $$[q, p, g(r), g^2(r)] = \frac{f(g(r))}{f(g^2(r))}.$$

   Finalement, on obtient

   $$f(g(r)) = [p, q, r, g(r)] = [q, p, g(r), g^2(r)] = \frac{f(g(r))}{f(g^2(r)},$$

   donc en simplifiant on obtient $f(g^2(r)) = 1$ donc $g^2(r) = r$ par injectivité de $f$. On conclut.

2. *Soient $p_1, p_2, p_3$ (respectivement $q_1, q_2, q_3$) trois points distincts de $\mathbb{P}^1(k)$ avec $(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$. Soit $f$ l'unique homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ qui envoie chaque $p_i$ sur $q_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que $f$ est une involution si et seulement si*

   $$[p_1, p_2, p_3, q_i] = [q_1, q_2, q_3, p_i],$$

   *pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.*

   La condition nécessaire est claire puisque les homographies conservent le birapport. Montrons la condition suffisante. On a :

   $$[p_1, p_2, p_3, q_i] = [f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(q_i)] = [q_1, q_2, q_3, f(q_i)] = [q_1, q_2, q_3, p_i]$$

   La première égalité est par invariance du birapport par homographie. La seconde utilise simplement la définition de $f$. La troisième est l'hypothèse sur les $p_i, q_i$. On obtient donc que $f(q_i) = p_i$ pour tout $i$. Finalement, puisque $(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$, il existe un $i$ tel que $p_i \neq q_i$ et on conclut par la question 1 que $f$ est un involution.

*On suppose maintenant que $k$ est de caractéristique différente de 2. Soit $g$ une involution de $\mathbb{P}^1(k)$ possédant un point fixe.*

3. *Montrer que $g$ possède exactement deux points fixes. On note $a, b$ ces points fixes.*

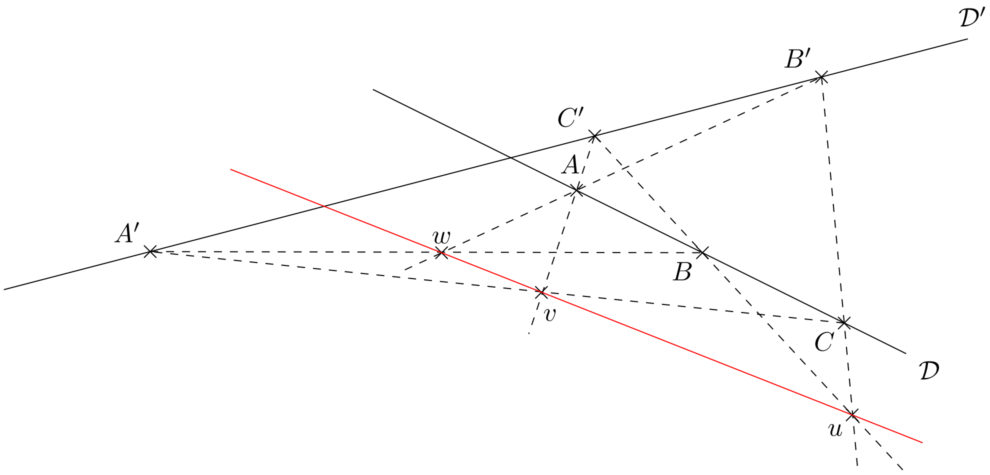
   On peut remarquer que puisque $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$, on sait que $g$ possède au plus deux points fixes (sinon $g$ coïnciderait avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$ sur trois points distincts donc serait l'identité). Soit $f$ un élément de $\mathrm{GL}(k^2)$ associé à $g$. Puisque $g$ est une involution de $\mathbb{P}^1(k)$, on a $f^2 = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(k^2)}$ avec $\lambda \in k^\times$. Puisque $g$ possède un point fixe, l'automorphisme $f$ possède une vecteur propre et donc une valeur propre $\mu$ dans $k^\times$. Remarquons que $\mu$ est une racine carrée de $\lambda$, l'autre racine carrée étant $-\mu$. De plus, on a $-\mu \neq \mu$ car $\mu \neq 0$ et $k$ est de caractéristique différente de 2. Maintenant, puisque $f$ est annulé par $X^2 - \lambda = (X - \mu)(X + \mu)$ qui est donc scindé à racines simples sur $k$, on sait que $f$ est diagonalisable. L'automorphisme $f$ n'est pas une homothétie puisque $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$, donc les deux valeurs propres de $f$ sont distinctes et sont $\mu$ et $-\mu$. Ainsi $f$ possède exactement deux droites propres, c'est-à-dire $g$ possède exactement deux points fixes.

4. *Montrer que pour tout point $m \in \mathbb{P}^1(k) \setminus \{a, b\}$ on a $[a, b, m, g(m)] = -1$.*

   Par la question précédente, on sait que $g(m) \neq m$. De plus, puisque $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$ on a également $g(m) \notin \{a, b\}$ donc les quatre points $a, b, m, g(m)$ sont bien distincts. Puisque $g$ conserve le birapport, on a d'une part
   $$[a, b, m, g(m)] = [a, b, g(m), m].$$
   D'autre part, par le 2 des questions de cours on a
   $$[a, b, m, g(m)] = [a, b, g(m), m]^{-1}.$$
   Ainsi, on obtient
   $$[a, b, m, g(m)] = [a, b, m, g(m)]^{-1},$$
   donc $[a, b, m, g(m)] = \pm 1$. Or, puisque $g(m) \neq m$ on a $[a, b, m, g(m) \neq 1$ (par définition du birapport), d'où le résultat.

## Exercice 2

*Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites d'un plan projectif. Soient $A, B, C$ trois points de $\mathcal{D}$ et $A', B', C'$ trois points de $\mathcal{D}'$. On note $u = (BC') \cap (B'C)$, $v = (CA') \cap (C'A)$ et $w = (AB') \cap (A'B)$. Le but de l'exercice est de montrer que les points $u, v, w$ sont alignés à l'aide de perspectives.*




1. *Rappeler le nom de cet énoncé.*

   C'est un sens du théorème de Pappus (on a en fait équivalence).

   *On note $p_1 : (BC') \to \mathcal{D}'$ la perspective de centre $C$ de $(BC')$ vers $\mathcal{D}'$. On note $p_2 : \mathcal{D}' \to (A'B)$ la perspective de centre $A$ de $\mathcal{D}'$ vers $(A'B)$. On note $f = p_2 \circ p_1$.*

2. *On note $M = (BC') \cap (A'C)$ et $N = (AC') \cap (A'B)$. Calculer $f(B)$, $f(M)$, $f(C')$ et $f(u)$.*

   Calculons d'abord les images par $p_1$, que l'on représente sur la Figure 1. Soit $O$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (rappelons que deux droites projectives se coupent toujours). Par définition, on a $p_1(B) \in \mathcal{D}' \cap (CB)$ donc $p_1(B) = O$ puisque $(BC) = \mathcal{D}$. De même, on trouve
   $$\begin{aligned} p_1(M) &= A', \\ p_1(C') &= C', \\ p_1(u) &= B'. \end{aligned}$$

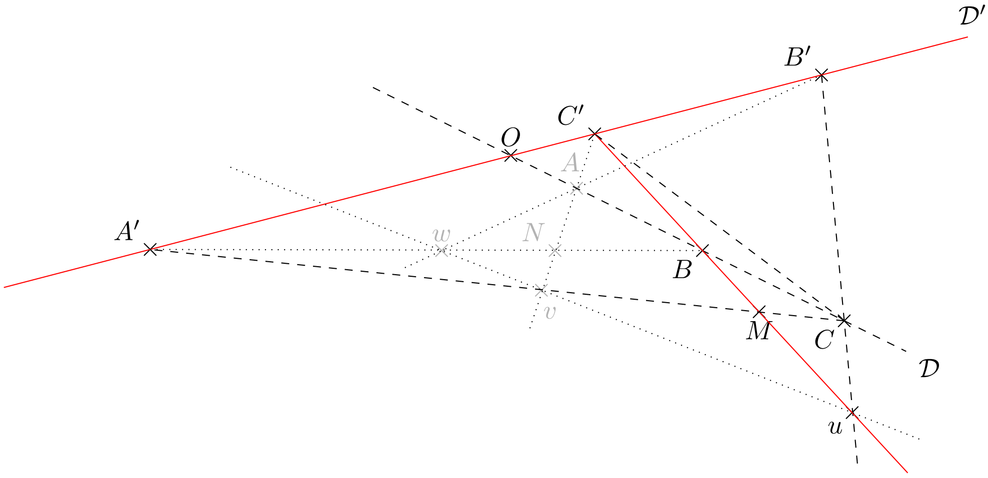



Figure 1 – Perspective $p_1$ de centre $C$ de $(BC')$ vers $\mathcal{D}'$

Calculons maintenant les images par $p_2$, des points $O, A', C'$ et $B'$ d'après ce qui précède, que l'on représente sur la Figure 2. On a $p_2(O) = (A'B) \cap (AO)$ donc $p_2(O) = B$ puisque $(AO) = \mathcal{D} \ni B$. De même, on montre que

$$\begin{aligned} p_2(A') &= A', \\ p_2(C') &= N, \\ p_2(B') &= w. \end{aligned}$$

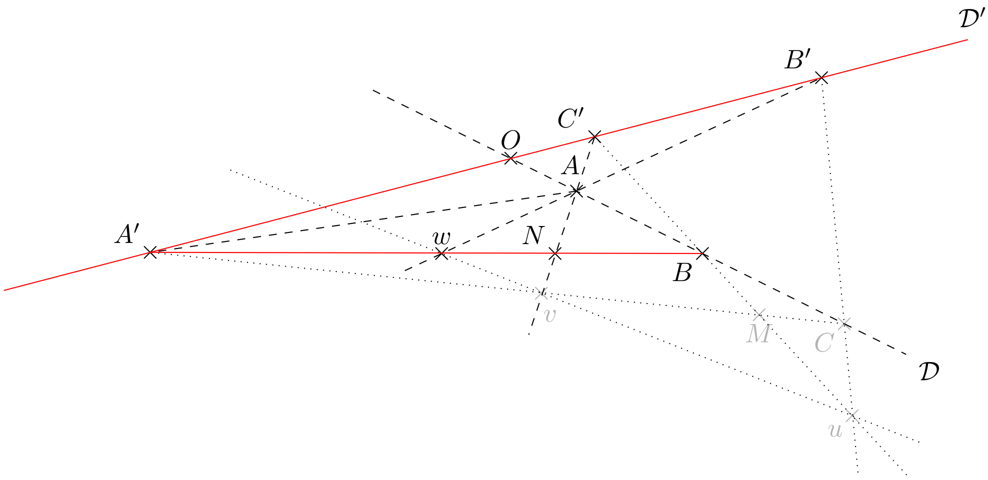



Figure 2 – Perspective $p_2$ de centre $A$ de $\mathcal{D}'$ vers $(A'B)$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} f(M) &= p_2(p_1(M)) = p_2(A') = A', \\ f(C') &= p_2(p_1(C')) = p_2(C') = N, \\ f(u) &= p_2(p_1(u)) = p_2(B') = w. \end{aligned}$$

*On note $q : (BC') \to (A'B)$ la perspective de centre $v$ de $(BC')$ vers $(A'B)$.*

3. *Calculer $q(B)$, $q(M)$ et $q(C')$.*
   On calcule comme dans la question précédente, pour trouver (cf. Figure 3)

$$q(B) = B, \qquad q(M) = A', \qquad q(C') = N.$$

4. *En déduire $q(u)$.*
   Les homographies $f$ et $q$ coïncident sur les points alignés distincts $B, M$ et $C'$ donc sont égales, ainsi $q(u) = f(u) = w$.

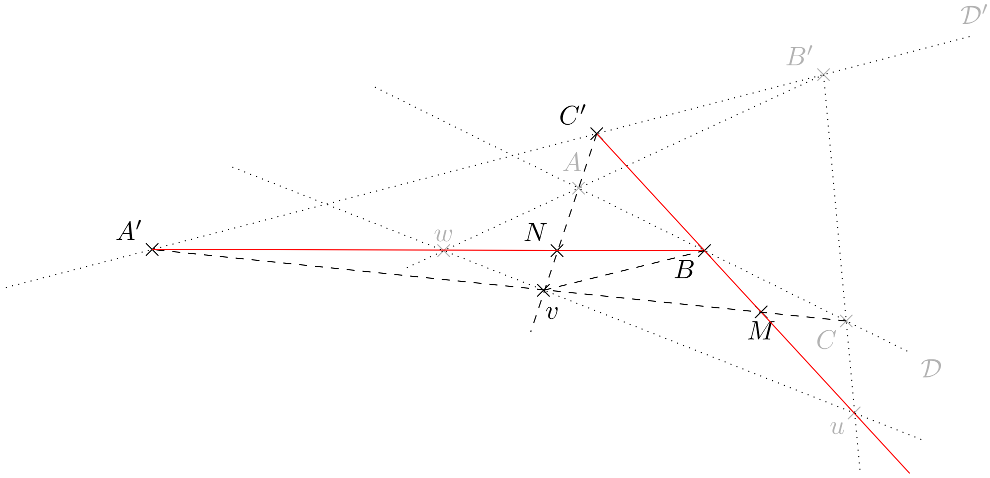


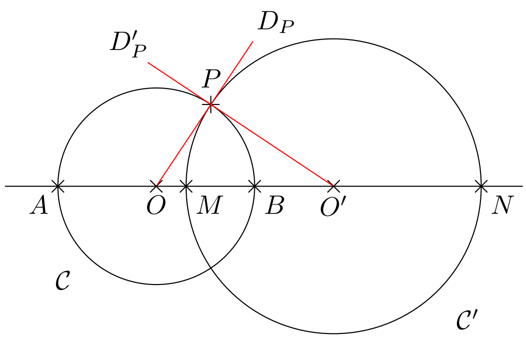

FIGURE 3 – Perspective $q$ de centre $v$ de $(BC')$ vers $(A'B)$

5. *Conclure.*
   Puisque $q(u) = w$, par définition de $q$ on sait que $v, u$ et $w$ sont alignés.

## Exercice 3

*Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de centres $O$ et $O'$. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont* orthogonaux *lorsque $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{P, Q\}$ et que les tangentes $D_P$ et $D'_P$ à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en $P$ sont orthogonales.*

*On suppose que la droite $(OO')$ rencontre $\mathcal{C}$ en $A, B$ et $\mathcal{C}'$ en $M, N$.*




1. *Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $[A, B, M, N] = -1$.*

   **Première solution, version géométrie euclidienne classique** Trouvons d'abord une condition d'orthogonalité. Quitte à changer de repère en utilisant un automorphisme affine du plan, qui est une homographie donc conserve le birapport, on peut supposer que $O = (0, 0)$ est l'origine et $O' = (x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$ (car $O' \neq O$, sinon bon courage pour la tangence). Soit $r$ (respectivement $r'$) le rayon de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$). Les points $P, Q$ sont déterminés par

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ (x - x_0)^2 + y^2 = r'^2, \end{cases}$$

   donc en soustrayant on obtient $x = \frac{r^2 - r'^2 + x_0^2}{2x_0}$. On a donc $x_P = x_Q$ avec

$$x_P = \frac{r^2 - r'^2 + x_0^2}{2x_0}, \tag{1}$$

   et $y_P = -y_Q = \sqrt{r^2 - x_P^2}$. La tangente à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) en $P$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{OP}$ (resp. $\overrightarrow{OP'}$), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' &\iff \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_0 \\ y_P \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff x_P(x_P - x_0) + y_P^2 = 0 \\
&\iff x_P^2 + y_P^2 - x_P x_0 = 0 \\
&\iff x_P x_0 = r^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (1) on obtient

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff x_0^2 = r^2 + r'^2. \tag{2}$$

Considérons maintenant $A(-r, 0)$, $B(r, 0)$, $M(x_0 - r', 0)$ et $N(x_0 + r', 0)$. En notant $t$ l'abscisse de $T \in \{A, B, M, N\}$ on a

$$\begin{aligned}
[A, B, M, N] &= \frac{n-b}{m-b} \Big/ \frac{n-a}{m-a} \\
&= \frac{(n-b)(m-a)}{(m-b)(n-a)} \\
&= \frac{(x_0 + r' - r)(x_0 - r' + r)}{(x_0 - r' - r)(x_0 + r' + r)} \\
&= \frac{x_0^2 - (r - r')^2}{x_0^2 - (r + r')^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, par (2) on obtient finalement

$$\begin{aligned}
[A, B, M, N] = -1 &\iff \frac{x_0^2 - (r - r')^2}{x_0^2 - (r + r')^2} = -1 \\
&\iff x_0^2 - (r - r')^2 = -x_0^2 + (r + r')^2 \\
&\iff 2x_0^2 = 2r^2 + 2r'^2 \\
&\iff x_0^2 = r^2 + r'^2 \\
&\iff \mathcal{C} \perp \mathcal{C}'.
\end{aligned}$$

**Deuxième solution, version géométrie projective de la droite complexe** On envoie le point $N$ à l'infini, ou de façon équivalente, on applique une homographie $g$ de la droite projective complexe telle que $g(N) = \infty$. On se rappelle que les homographies de la droite projective complexe préserve l'ensemble des droites et des cercles. Ainsi,

(a) $g(\mathcal{C})$ est un cercle puisque $\mathcal{C}$ ne contient pas $N$.

(b) $g(\mathcal{C}')$ est une droite puisque $\mathcal{C}'$ contient le point $N$.

(c) $g((OO'))$ est une droite puisque $(OO') = (AB) = (MN)$ donc contient le point $N$.

*Attention :* $g(O)$ n'a pas de raison d'être le centre du cercle $g(\mathcal{C})$. Penser à $g(O')$ qui n'est pas le centre de la droite $g(\mathcal{C}')$...

Une droite $\mathcal{D}$ et un cercle $\mathcal{C}$ sont dits *orthogonaux* si les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ aux points d'intersections $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ sont orthogonales à la droite $\mathcal{D}$, autrement dit si et seulement si $\mathcal{D}$ passe par le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Il est important de se rappeler qu'une homographie de la droite projective complexe est une application holomorphe $\mathbb{C} \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$. Par conséquent, elle conserve les angles entre les courbes par conséquent :

$$g(\mathcal{C}') \perp g((OO')), \qquad g(\mathcal{C}) \perp g((OO')) \quad \text{et} \quad g(\mathcal{C}') \perp g(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}' \perp \mathcal{C}$$

puisque $(OO') \perp \mathcal{C}, \mathcal{C}'$. En particulier, la droite $g((OO'))$ passe par le centre de $g(\mathcal{C})$ donc $[g(A)\, g(B)]$ est un diamètre de $g(\mathcal{C})$ et la droite $g(\mathcal{C}') \perp g((OO'))$. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}' \perp \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad g(\mathcal{C}') \perp g(\mathcal{C}) \\
&\Leftrightarrow \quad g(M) \text{ est le milieu du segment } [g(A)\, g(B)] \\
&\Leftrightarrow \quad [g(A), g(B), g(M), \infty] = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad [g(A), g(B), g(M), g(N)] = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad [A, B, M, N] = -1
\end{aligned}$$