

Feuille n° 4 : Calcul de Primitives

1 Intégration par parties

Exercice 1

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\ln x$
2. $x \ln x$
3. $\arctan x$
4. $x^2 e^{-x}$
5. $e^x \cos(x)$
6. $x^3 e^{-x^2}$
7. $x^3 \operatorname{sh} x$
8. $\ln^2 x$
9. $\cos x \ln(1 + \cos x)$
10. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
11. $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x$.

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel. Intégrer par parties $I_n = \int_0^\pi x(\pi - x) \cos(nx) dx$.
2. Calculer, en intégrant par parties, $I = \int \exp(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ en fonction de $J = \int \exp(\alpha x) \sin(\beta x) dx$. Calculer J en fonction de I . En déduire les valeurs de I et J .

2 Changement de variable

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables $t = 1/x$.

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\phi' f'(\phi)$

1. $\frac{1}{x^2 + 25}$
2. $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
3. $x\sqrt{1+x^2}$
4. $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

5. $\frac{e^x}{e^{2x} + 1}$
6. $\frac{\sin x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}}$
7. $\cos^3 x$
8. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Exercice 5

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\frac{1}{\cos x}$
2. $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$

3 Fractions rationnelles

Exercice 6

Calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. a. Trouver trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$.
 b. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3 - x}$.
2. a. Trouver trois réels a , b et c tels que $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = a + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2}$.
 b. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2}$.
3. a. Trouver trois réels a , b et c tels que $\frac{X^2 + 2}{X^2 + 1} = a + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$.
 b. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.
4. a. Trouver quatre réels a , b , c et d tels que $\frac{X^3 + 1}{X^2 + 4} = aX + b + \frac{cX + d}{X^2 + 4}$.
 b. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$.

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{1/2} \frac{t^3}{1 - t} dt$
2. $\int_0^1 \frac{t}{t^2 - t + 1} dt$

4 Par parties ou par changement de variables ?

Exercice 8

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $\sin(\cos x) \sin x$
2. $x^3 e^{-x^2}$
3. $2x(x^2 + 1) \exp(x^2)$.

4. $x^{1/2} \ln x$
5. $\frac{\sin x}{e^x}$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1. F est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée f .
2. Si f est positive sur \mathbb{R} alors F est positive sur \mathbb{R} .
3. Si f est croissante sur \mathbb{R} alors F est croissante sur \mathbb{R} .
4. Si f est négative sur \mathbb{R} alors F est décroissante sur \mathbb{R} .
5. Si f est paire alors F est impaire.
6. Si f est T -périodique sur \mathbb{R} alors F est T -périodique sur \mathbb{R} .

Exercice 10

1. Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$

2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx \qquad b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx.$$

5 Pour aller plus loin

Exercice 11

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2} .
3. Montrer que le produit $(n + 1)I_n I_{n+1}$ est constant.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n$.
5. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π .

Exercice 12

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \sup_{t \in [a, b]} f(t).$$

Exercice 13

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Calculer la limite de la suite $u_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$.