Contrôle continu du lundi 14 décembre 2020
Durée : 1h30

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Questions de cours

1. Calculer la dérivée de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \big(\ln(x^2+2)\big)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les dérivées partielles de l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y + \arctan(x-y)$. (on ne demande pas le domaine de dérivabilité).

3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f(x) = \ln(x)$.

4. **a.** Donner, avec des quantificateurs, la définition de la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer **en utilisant la définition donnée précédemment** que la suite définie, pour tout entier n, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ converge vers 1.

5. Donner, avec des quantificateurs, la définition d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante minorée par L. Préciser si la suite converge, ne converge pas, converge vers L.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$$

1. **a.** Donner son domaine de définition D_f et son domaine de dérivabilité E_f.

b. Calculer sa dérivée sur E_f.

2. Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

3. Montrer que la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0,+\infty[$ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$.

4. Déterminer son application réciproque.

Exercice 2

Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$.

Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$.

Exercice 3

On considère la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{x+4}{(2x+3)(1-x)}$ définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}; 1\}$.

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D$, on ait

$$\frac{x+4}{(2x+3)(1-x)} = \frac{a}{2x+3} + \frac{b}{1-x}.$$

2. Calculer une primitive de f.

Exercice 4

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites de terme général :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2. $v_n = \dfrac{3n^2 + \sin(n)}{2^n + 3}$