

Feuille n° 5 : Suites

1 Première manipulation

Exercice 1

Soit la suite de terme général $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + n^2 + 2}$. Trouver un entier N , tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < 10^{-2}$.

Plus généralement, ε étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N , tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < \varepsilon$. Qu'a-t-on démontré pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2

Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n + 1}{5n + 2}$.

Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, trouver un entier N_p tel que, pour tout $n \geq N_p$, on ait $|u_n - \ell| < 10^{-p}$.

Même question avec la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{2n^2 + 1}{5n^2 + 2}$.

Observez la différence de rapidité de convergence des deux suites (prendre $p = 4$).

Exercice 3

Écrire sous forme quantifiée les propriétés suivantes :

1. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée
2. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée
3. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente
4. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone

2 Limite I

Exercice 4

Étudier chacune des suites (u_n) définies ci-dessous, et déterminer lesquelles sont (a) bornées, (b) positives ou négatives, (c) croissantes, décroissantes, (d) convergentes, non convergentes, divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$,

3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 5

Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies ci-dessous, compléter la définition le cas échéant pour que l'expression proposée ait un sens, étudier la convergence de la suite et déterminer sa limite lorsqu'elle est convergente.

1. $\forall n \in ?, u_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$,

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$.

Exercice 6

Montrer, en utilisant la définition, que les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Exercice 7

Montrer que, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 8

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\lfloor a \rfloor + \lfloor 2a \rfloor + \dots + \lfloor na \rfloor}{n^2}$$

converge et calculer sa limite.

3 Vrai ou Faux

Exercice 9

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses? Justifier votre réponse.

1. Si f est une application croissante, la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si f est une application croissante, la suite $(f^n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Si P est une fonction polynomiale, la suite $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.
4. Si $0 \leq r \leq 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. Si $0 \leq r < 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $(\cos(n)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 alors $(\cos(n)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.
8. La suite $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$.
9. On peut extraire de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite constante.

Exercice 10

Chacun des énoncés suivants est-il vrai ou faux?

S'il est vrai, le démontrer; s'il est faux, donner un contre-exemple.

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est croissante, majorée par ℓ , elle converge.
3. Si une suite est croissante, majorée par ℓ , elle converge vers ℓ .
4. Toute suite bornée est convergente.
5. Si une suite est convergente, elle est soit croissante majorée, soit décroissante minorée.
6. Toute suite convergente est bornée.
7. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. Si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 11

Les suites suivantes convergent-elles?

Indication : chercher des suites extraites de la suite (u_n) convergeant vers des limites différentes.

1. $u_n = \frac{2n+1 + (-1)^n n}{n}$
2. $v_n = \frac{1}{n^2 + n^{(-1)^n}}$
3. $w_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

4 Limite II

Exercice 12

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad v_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \sin(n)}$$

Exercice 13

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et convergente puis trouver la limite. On rappelle que, pour tout $x > 0$, on a $\sin x < x$.

Exercice 14

Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = \sqrt[n]{n}$
2. $u_n = \sqrt[n]{\ln(n)}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 15

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}} \quad v_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$$

5 Suites adjacentes

Exercice 16

Montrer que les suites, définies pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)(k-1)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 17

Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ son terme d'indice n à l'aide de n , a_0 et b_0 .
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n$; montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 18

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminées par $u_0 = b$, $v_0 = a$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes.

6 Pour aller plus loin

Exercice 19

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

Exercice 20

En simplifiant le terme général u_n , étudier la convergence de la suite

$$u_n = \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 21

Étudier la convergence des suites :

$$a) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad b) \quad u_n = \sum_{i=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + i}}$$

Exercice 22

On considère le sous-ensemble A de \mathbb{R} défini par $A = \left\{ \frac{2n^2}{n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est borné.
2.
 - a. Étudier l'existence d'un plus grand élément, d'une borne supérieure de A . Les déterminer s'ils existent.
 - b. Étudier l'existence d'un plus petit élément, d'une borne inférieure de A . Les déterminer s'ils existent.
3. On définit une suite réelle par $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Déterminer sa limite ℓ .
 - b. Soit k un entier naturel et $\varepsilon = 10^{-k}$. Déterminer un entier N tel que, pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.