Feuille no 4 : Calcul de Primitives

1 Intégration par parties

Exercice 1

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\ln x$

2. $x \ln x$

3. $\arctan x$

4. $x^2 e^{-x}$

5. $e^x \cos(x)$

6. $x^3 e^{-x^2}$

7. $x^3 \operatorname{sh} x$

8. $\ln^2 x$

9. $\cos x \ln(1+\cos x)$

10. $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

11. $\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+x.$

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel. Intégrer par parties $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x(\pi - x)\cos(nx)\,dx$.

2. Calculer, en intégrant par parties, $I = \int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ en fonction de $J = \int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$. Calculer J en fonction de I. En déduire les valeurs de I et J.

2 Changement de variable

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$.

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes en faisant un changement de variable :

1. $\dfrac{1}{x^2+25}$

2. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

3. $x\sqrt{1+x^2}$

4. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 5

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\varphi' f'(\varphi)$

1. $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$
2. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$
3. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 6

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\dfrac{1}{\cos x}$
2. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

3 Fractions rationnelles

Exercice 7

Calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{X^3-X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-x}$.
2. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = a + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X-2}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$.
3. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2+2}{X^2+1} = a + \dfrac{bX+c}{X^2+1}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.
4. **a.** Trouver quatres réels a, b, c et d tels que $\dfrac{X^3+1}{X^2+4} = aX + b + \dfrac{cX+d}{X^2+4}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+4}$.

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1-t}\, dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1}\, dt$

4 Par parties ou par changement de variables ?

Exercice 9

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $\sin(\cos x)\sin x$
2. $x^3 e^{-x^2}$

3. $2x(x^2+1)\exp(x^2)$.
4. $x^{\frac{1}{2}} \ln x$
5. $\dfrac{\sin x}{e^x}$

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.
Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
2. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est paire alors F est impaire.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

1. Montrer que si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$
2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :
$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\, dx.$$
On pourra utiliser librement la formule :
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

5 Pour aller plus loin

Exercice 12

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. Montrer que le produit $(n\ +1)I_n I_{n+1}$ est constant.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.
5. Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 13

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\int_a^b f(t)dt\ = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 14

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.