Feuille n^o 3 : Dérivabilité

1 Dérivabilité

Exercice 1

En utilisant simplement la définition de la dérivée comme limite, montrer l'existence et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$(a) \quad x \mapsto x^2 + x \ , \quad (b) \quad x \mapsto \sqrt{x+1} \ , \quad (c) \quad x \mapsto \frac{1}{x+2}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes :

$$(\mathbf{a}) \quad x \mapsto \cos(x \ln(x)) \ , \quad (\mathbf{b}) \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + e^x}$$

$$(\mathbf{c}) \quad x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big) \ , \quad (\mathbf{d}) \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + 2\sin(x)}$$

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction.
2. Utiliser les résultats concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité.

2 Dérivée de fonctions composées

Exercice 3

1. La fonction $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \ln|x| \in \mathbb{R}$ est-elle dérivable sur son domaine de définition ?

2. On considère l'expression :

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

Montrer qu'elle permet de définir une application f (dont on précisera le domaine de départ et le domaine d'arrivée).

3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

3 Inégalités et extrémas

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, et leurs domaines de définition respectifs, déterminer les minima, maxima locaux et globaux quand ils existent.

$$(a) \quad (x^2 - 1)^2 \ , \qquad (b) \quad x^2 + 2x - 3 \ , \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Exercice 5

Soit $f(x) = |x^2 - 4|$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de f.

Exercice 6

Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 7

Montrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\quad (1+x)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{3}\, x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad |\sin x| \leqslant |x|$.
3. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

4 Variations de fonctions

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et sa parité.
2. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x^4 - 4x^2 - 1$.
3. En déduire les variations de f.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 9

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et sa parité éventuelle.
2. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que $f'(x)$ et $f(x)$ sont de signes opposés pour tout $x \in \mathcal{D}$.
4. En déduire les variations de f.
5. Montrer que, pour tous réels positifs a et b (dont la somme est strictement positive) :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

6. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 10

Étudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = \ln(1 + x^4) \ , \qquad f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} \ , \qquad f_2(x) = x - 2\ln\big(3e^x + 3\big)$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + 3\text{arctan}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. Déterminer le signe de $\frac{x-1}{x+1}$ selon les valeurs de x.
2. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
3. Vérifier que f est impaire.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 - 1}$$

5. En déduire que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^4 + x^2 - 6$.
6. Étudier les variations de f.

5 Fonctions réciproques

Exercice 12

On pose $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in D\,, \quad f(x) = \frac{2x}{3x-1}$$

1. Déterminer $f(D)$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. On considère $g : D \ni x \mapsto f(x) \in f(D)$.
Expliquer pourquoi g est bijective et expliciter sa réciproque.
4. Esquisser les graphes de g et g^{-1} sur un même dessin.

Exercice 13

On pose $I =]-3, +\infty[$ et on considère $I \ni x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante et réalise une bijection sur son image (bijection qu'on appellera encore f). Donner la bijection réciproque.
2. Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même dessin.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Trouver un sous-domaine $D \subset D_f$ tel que f soit une bijection de D sur $f(D)$.
3. Utiliser un théorème du cours pour montrer, sans calculs, que f admet une fonction réciproque définie sur un domaine de définition à déterminer. Quelle est l'image de f^{-1} ?
4. Tracer f et sa réciproque f^{-1} dans un même repère.
5. Trouver par le calcul l'expression de f^{-1}. Retrouver les résultats précédents.

6 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 15

Trouver des exemples numériques pour montrer qu'en général :

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$$

Exercice 16

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x))$, pour $x \in [-1, 1]$

2. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

3. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{2}\right]$

4. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [\pi\ ,\ 3\pi]$

5. $\cos(\arcsin(x))$, pour $x \in [-1, 1]$.

6. $\sin(\arctan(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 17

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont définies et dérivables et déterminer la dérivée sur ce domaine :

$$(a)\ f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \arcsin(x^2)\quad ;\quad (b)\ \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)\quad ;\quad (c)\ \arccos(2x^2 - 1)$$

Exercice 18

Étudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\quad ,\quad g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\quad ,\quad h(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

7 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 19

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\quad ,\qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. **a.** Établir que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

2. **a.** Montrer que sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection et donner l'expression explicite de sa bijection réciproque, notée argsh.

b. Calculer la dérivée de argsh.

c. La fonction ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective, injective ?

d. On considère maintenant ch : $[0, +\infty[\to [1, +\infty[$. Montrer que la fonction est bien définie et qu'il s'agit d'une bijection dont on calculera la réciproque, notée argch.

e. Calculer la dérivée de argch.

8 Fonctions de plusieurs variables

Exercice 20

Déterminer les domaines de dérivabilité des applications suivantes, puis calculer leurs dérivées partielles.

1. L'application $h :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = x^2 + y^2$.

2. L'application f de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy^2z$.

3. L'application g de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = uve^v$.

4. L'application $k : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $k(x,y) = \sin(xy^2)$.

5. L'application $l : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définies par $l(u,v,w) = uvw$.

Exercice 21

Déterminer puis représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \cos(x+2y+1)$

2. $f_2(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

3. $f_3(x,y) = |xy|$

4. $f_4(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

Déterminer les ensembles où sont définies les dérivées partielles de ces fonctions, puis les calculer.

9 Pour aller plus loin

Exercice 22

Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 23

Calculer les limites suivantes au besoin à l'aide de la règle de l'Hôpital :

$$(a) \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right) \quad , \quad (b) \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \quad , \quad (c) \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Exercice 24

Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x-1} \quad , \quad (b) \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \quad , \quad (c) \lim_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$$

Exercice 25

Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du théorème de Rolle, montrer que le polynôme

$$P(X) = X^n + aX + b$$

admet au plus trois racines réelles distinctes.