Feuille n° 1 : Nombres réels, inégalités

Dans cette feuille, l'usage de la calculatrice est proscrit.

Préliminaires

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils rationnels : $\frac{1}{2}$, -1, 3, $\sqrt{2}-\frac{13}{9}$? On admettra que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

A-t-on, pour tous entiers strictement positifs a, b, c et d,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

Exercice 3

Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{9}{4}-\frac{13}{3}+\frac{11}{6}\,, \quad \frac{2}{1-\frac{30}{29+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{8}\,.$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels avec b non nul. Le nombre $\frac{a}{b}$ est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 5

Illustrer graphiquement l'égalité suivante :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,, \quad (x+y)(z+t)=xz+xt+yz+yt\,.$$

Exercice 6

Lequel des deux réels $\dfrac{10^{20}}{1+10^{20}}$ et $1+10^{-20}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice 7

Soit $\alpha \in]0,1]$ et $I_\alpha =]-5-\alpha, -5+\alpha[$. Déterminer α pour que, si $x \in I_\alpha$, alors $\left|\dfrac{x+5}{x+3}\right| < 10^{-2}$.

Inégalités

Exercice 8

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-\sqrt{2}| \leqslant 1\}\,, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x+3| > 5\}\,.$$

Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x-3|+|x+4| \leqslant 7\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$:

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2-1} \leqslant 1\,.$$

Exercice 10

1. Montrer que, pour tous les réels x et y, on a

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2 \,.$$

2. Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$2|xy| = x^2 + y^2 \,.$$

Exercice 11

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $|x - 1| \leqslant 2$ et que $-5 \leqslant y \leqslant -4$. Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x + y, \quad x - y\,, \quad |x| - |y|\,, \quad xy\,, \quad \frac{x}{y}.$$

Intervalles

Exercice 12

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0, 3[\cap[3, 4[\,, \quad [0, 3[\cup]3, 4[\,, \quad \mathbb{Z}\,, \quad \mathbb{Q}\,, \quad \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geqslant 1\} \quad ?$$

Exercice 13

Existe-t-il un intervalle non-trivial qui ne contient aucun nombre rationnel ?

Exercice 14

1. L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ? Et la réunion de deux intervalles qui s'intersectent ?

2. Trouver deux intervalles dont l'intersection est vide et dont la réunion est un intervalle.

Exercice 15

On rappelle si x est un nombre réel alors le réel $x_+ = \max(x, 0)$ désigne la partie positive de x. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ \leqslant 1\}\,, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ > 2\}\,.$$

1. Représenter graphiquement A et B.

2. Peut-on écrire A et B comme des unions finies d'intervalles disjoints ?

3. Que vaut $A \cup B$? Et $A \cap B$?

Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 16

Soit

$$E = \left\{ \frac{201}{17}\,, \quad -23\,, \quad \frac{145}{12}\,, \quad 9\sqrt{3} + \frac{111}{12}\,, \quad 20\,, \quad -\frac{231}{11} \right\}.$$

Donner le maximum et le minimum de E. Si on est amené à utiliser une approximation, on la démontrera.

Exercice 17

Existe-il un entier naturel majorant tous les réels ? Existe-t-il un réel majorant tous les entiers naturels ?

Exercice 18

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $M \in X$ tel que :

$$\forall x \in X\,, \quad x \leqslant M\,.$$

Montrer qu'un tel M est unique. On l'appelle le maximum de X.

Exercice 19

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on a $x + y + 3 \neq 0$.
2. On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} \,:\, x \in [-1,1],\, y \in [-1,1] \right\}.$$

   Trouver un majorant et minorant de A.

Pour aller plus loin

Exercice 20

A-t-on, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)_- = a_- + b_-$?

Exercice 21

Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\sqrt{a_+} - \sqrt{b_+}| \leqslant \sqrt{|a-b|}\,.$$

Exercice 22

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$. Montrer que pour tous les réels x et y, on a :

$$N_\infty(x, y) \leqslant N_2(x, y) \leqslant N_1(x, y) \leqslant 2N_\infty(x, y)\,.$$

Exercice 23

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A + B = \{a + b\,, a \in A\,, b \in B\}\,.$$

On suppose que A et B sont majorées.

1. Montrer que $A + B$ est majorée.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 24

Soit r un réel strictement positif. On introduit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant r\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = r$.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une partie finie de $\mathbb{R}$ à n éléments qu'on écrit :

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

1. On pose
$$M_1 = \max(x_1, x_2)$$
   et, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, on définit
$$M_k = \max(M_{k-1}, x_k)\,.$$
   Montrer que $M_n \in X$ et que M_n est un (le) maximum de X.
2. Montrer que X admet une borne supérieure, notée S.
3. Montrer que le maximum de X est égal à S.
4. Montrer que X possède un minimum et que ce minimum est la borne inférieure de X.