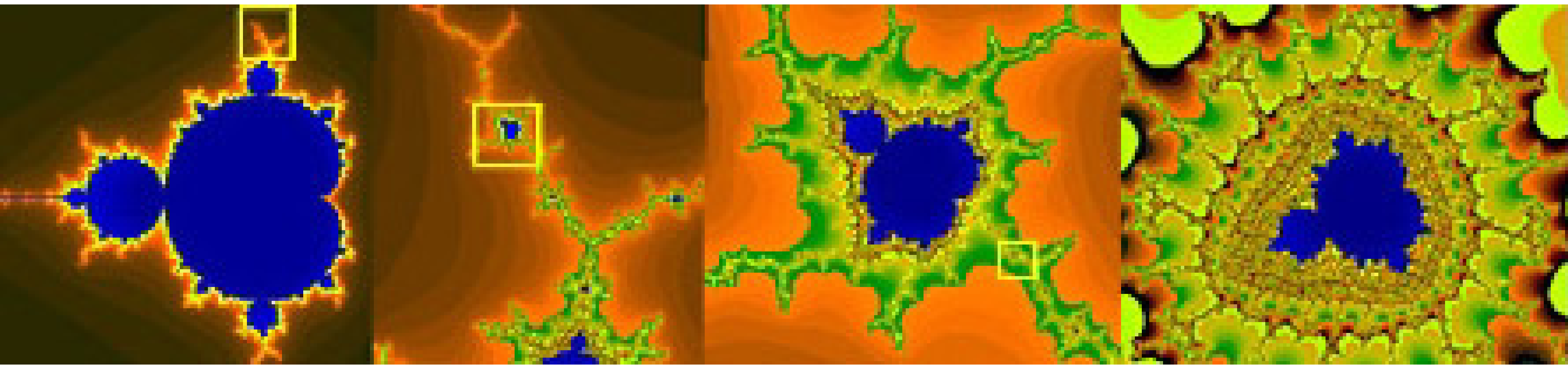
Analyse 1



Pour la Licence 1 - Mathématiques

de l'Université de Rennes 1

Ce polycopié de cours est basé sur un polycopié de NICOLAS RAYMOND. Le contenu de celui-ci a dérivé au fil du temps mais reste très proche du contenu de l'original, l'ordre est aussi légèrement différent.

On pourra trouver sur la page web de Nicolas Raymond, une version encore plus étoffée du polycopié original.
`http://nraymond.perso.math.cnrs.fr/`
`http://nraymond.perso.math.cnrs.fr/AN1.pdf`

Le template utilisé pour le rendu du polycopié est le Legrand Orange Book disponible sur le web à l'adresse suivante :
https://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book

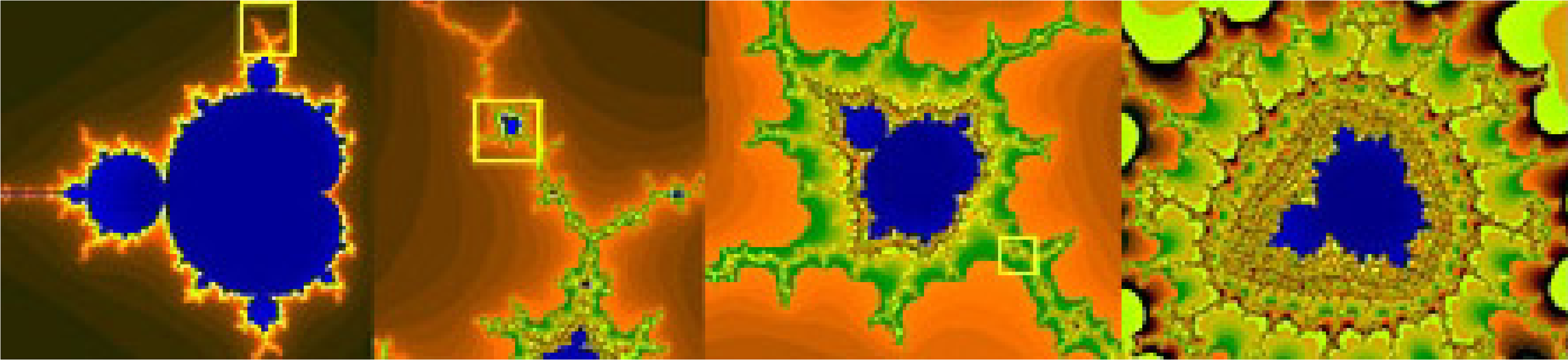
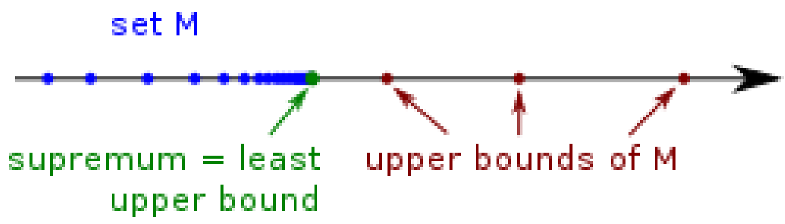


Table des matières



1. Les nombres réels

On s'appuiera sur les notions d'ensembles et d'appartenance sans les rappeler. Les rudiments de logique et de théorie des ensembles font partie du cours d'Algèbre-Géométrie 1.

I Ensembles

Définition I.1

1. Si A et B sont deux ensembles, on dira que $A \subset B$ quand $x \in A$ implique que $x \in B$. On dit dans ce cas que A est une *partie* de B. On dit aussi que A est *inclus* dans B ou que B *contient* A.
2. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur *réunion* est
$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}.$$
3. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur *intersection* est
$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}.$$

II Les nombres

On ne présentera pas les constructions formelles des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, on va simplement rappeler quelques propriétés de ces ensembles et de ces nombres.

1. Les *entiers naturels* sont les nombres $0, 1, 2, 3, \cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{N}$. On peut additionner deux entiers m et n et leur somme est notée $m + n$. L'addition est
   (a) associative, c'est à dire que $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$.

(b) commutative, c'est à dire que $a+b=b+a$ pour tout $a,b\in\mathbb{N}$.
(c) et possède un élément neutre 0, c'est à dire : $n+0=0+n=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Tout entier non nul n possède un prédécesseur, au sens où il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=k+1$. Nous pouvons aussi définir une multiplication entre entiers notée $\times$ qui est

(a) associative, c'est à dire que $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ pour tout $a,b,c\in\mathbb{N}$.
(b) distributive sur l'addition, c'est à dire que $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ pour tout $a,b,c\in\mathbb{N}$.
(c) commutative, c'est à dire que $a\times b=b\times a$ pour tout $a,b\in\mathbb{N}$.
(d) et qui possède un élément neutre 1, c'est à dire : $n\times 1=1\times n=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Les *entiers relatifs* sont les nombres $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$. L'addition de $\mathbb{N}$ peut être étendue en une addition sur $\mathbb{Z}$ et elle satisfait la propriété fondamentale que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, il existe un unique $\ell\in\mathbb{Z}$ tel que $k+\ell=0$. Cet unique ℓ n'est autre que $-k$. Grâce à $\mathbb{Z}$, nous savons désormais résoudre l'équation $x+1=0$. On peut aussi étendre la multiplication aux entiers relatifs.

3. Les *nombres rationnels* sont formés des quotients de nombres relatifs (par exemple $-\frac{1}{2}$, 0, 14). Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$. Étant donné $a\in\mathbb{Z}$ (non nul), nous pouvons maintenant résoudre par exemple $ax=1$. Son unique solution est $x=\frac{1}{a}=a^{-1}$. $\mathbb{Q}$ possède une autre propriété que $\mathbb{Z}$ ne satisfait pas : entre deux rationnels distincts, il y a toujours un autre rationnel ! Mais certaines quantités géométriques ne se traduisent pas en termes rationnels (la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, le périmètre d'un disque de rayon 1)...

4. Arrivent enfin les *nombres réels* qui complètent $\mathbb{Q}$ et permettent notamment de résoudre $x^2=2$ (dont l'unique solution positive est $\sqrt{2}$ et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$) ou de mesurer le périmètre d'un cercle de rayon 1 (2π). $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication avec lesquelles le lecteur est familier.

III Inégalités

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ que le lecteur a déjà rencontrée.

Lemme III.1 — Lemme aussi évident qu'utile. Soit a un réel positif. Si a vérifie : pour tout $\varepsilon>0$, $a\leqslant\varepsilon$, alors $a=0$.

Démonstration. Supposons que $a>0$, alors $\varepsilon=a/2>0$ et on a $a>\varepsilon$ contradiction. ∎

Une conséquence de la construction des nombres réels est le lemme suivant.

Lemme III.2 — ⋆ Lemme d'Archimède. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est *archimédien*, au sens où, pour tout $\varepsilon, x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$.

Démonstration. On verra dans quelques instants ! ∎

Lemme III.3 — ⋆. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est la *partie entière* de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. On considère $E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > x\}$, l'ensemble E est non vide. En effet, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m \cdot 1 > x$$

Donc, l'ensemble E possède un unique plus petit élément k. On note n l'unique élément de $\mathbb{N}$ tel que $k = n+1$. Par définition, on a $n \leqslant x < k = n+1$. Le seconde car $k \in E$, la première car k est le plus petit élément de E. ∎

Définition III.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A est *majorée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \leqslant M$. Le nombre M s'appelle un *majorant* de A.
2. On dit que A est *minorée* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \geqslant M$. Le nombre m s'appelle un *minorant* de A.
3. On dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

R Notons que si M est un majorant de A alors tout nombre $M' \geqslant M$ est aussi un majorant. Le théorème V.1 montre que tout ensemble non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède un plus petit majorant $M_0 \in \mathbb{R}$. Ceci est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, que ne vérifie pas $\mathbb{Q}$.

R Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$, on note $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Remarquons que : M est un majorant de A si et seulement si $-M$ est un minorant de $-A$; de même m est un minorant de A si et seulement $-m$ est un majorant de $-A$. Par conséquent, toutes propositions, théorèmes, remarques, etc... énoncées pour les majorants s'appliquent de manière analogue pour les minorants.

Définition III.2 Soit E une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble E *admet un maximum* s'il existe un majorant M de E tel que $M \in E$. Si E admet un maximum alors ce maximum est unique et s'appelle *le maximum* de E. L'ensemble E *admet un minimum* s'il existe un minorant M de E tel que $M \in E$. Si E admet un minimum alors ce minimum est unique et s'appelle *le minimum* de E.

Démonstration. Supposons que M, M' sont deux maximums de E alors on a $M \leqslant M'$ puisque M' est un maximum et $M' \leqslant M$ puisque M est un maximum. Donc $M = M'$. ∎

R Certains ensembles majorées n'ont pas de maximum, par exemple $[0,1[$ est majorée mais n'a pas de maximum.

IV Valeur absolue

R Si $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\max(x,y)$ le plus grand de ses deux réels, et $\min(x,y)$ le plus petit. Par exemple, $\max(-2,3)=3$ et $\min(1,27)=1$.

On rappelle la définition d'une application très utile : la valeur absolue d'un nombre réel.

Définition IV.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$|x| = \max(x,-x)\,, \quad x_+ = \max(x,0)\,, \quad x_- = \max(-x,0)\,.$$

La quantité $|x|$ s'appelle la *valeur absolue* de x, les quantités x_+ et x_- s'appellent respectivement la *partie positive* et la *partie négative* de x.

Proposition IV.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\quad |x| = x_+ + x_-\,, \quad x = x_+ - x_-$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geqslant 0$ alors :

$$|x| = x = x_+ \quad \text{et} \quad x_- = 0$$

Si $x < 0$ alors :

$$|x| = -x = x_- \quad \text{et} \quad x_+ = 0$$

■

R Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Géométriquement, la valeur absolue $|x|$ de x est la distance entre le point x et l'origine sur la droite réelle ; la valeur absolue $|x-y|$ de $x-y$ est la distance entre les points x et y sur la droite réelle.

Proposition IV.2 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 = |x|^2 \qquad \text{et} \qquad |xy| = |x|\cdot|y|.$$

Exercice 1.1 Le démontrer. ■

Proposition IV.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \geqslant 0$, on a :

$$|x| \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad -a \leqslant x \leqslant a$$

Exercice 1.2 Le démontrer. ■

Proposition IV.4 Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M$$

Exercice 1.3 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Proposition IV.5 — L'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Avec égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration. Si x, y sont tous les deux positifs ou nuls ou tous les deux négatifs ou nuls, on a égalité. Il reste donc à traiter le cas où ils sont non-nuls et de signe opposés. On peut supposer quitte à échanger les rôles que $x > 0$ et $y < 0$. On a doit sépare deux cas :

$$Cas\,1 : 0 < x \leqslant -y \quad Cas\,2 : 0 < -y < x$$

On commence par le cas 1. Supposer le cas 1 signifie que :

$$x + y \leqslant 0$$

Ainsi

$$|x+y| = -x - y \quad |x| + |y| = x - y$$

Par suite,

$$|x| + |y| - |x+y| = 2x > 0$$

On termine avec le cas 2. Supposer le cas 2 signifie que :

$$x + y > 0$$

Ainsi

$$|x+y| = x + y \quad |x| + |y| = x - y$$

Par suite,

$$|x| + |y| - |x+y| = -2y > 0$$

■

V Bornes supérieures et inférieures

Définition V.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. La *borne supérieure* de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S, et concrètement c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.
2. La *borne inférieure* de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I, et concrètement c'est l'unique minorant S tel que

tout autre minorant m est forcément plus petit que I.

Nous allons énoncer un théorème (qu'on va admettre) concernant l'existence et la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure.

Théorème V.1 — ⋆. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure et c'est l'unique nombre réel S vérifiant,
   (a) S est un majorant de A,
   (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \geqslant S - \varepsilon$.
2. Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure et c'est l'unique nombre réel I vérifiant,
   (a) I est un minorant de A,
   (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \leqslant I + \varepsilon$.

Ce théorème est très utile pour montrer l'existence de réels vérifiant certaines propriétés.

Exercice 1.4 Considérons

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{R}.$$

Montrer que A est non vide et majorée. On note S sa borne supérieure et montrer que $S^2 = 2$. Qu'avez vous démontré ? Combien l'équation $x^2 = 2$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Solution. L'ensemble A est non vide puisque $0,1 \in A$. L'ensemble A est majorée par 2, en effet si $x > 2$ alors $x^2 > 4$. L'ensemble A possède donc une borne supérieure S. Au passage, on note dans un coin que $S \leqslant 2$, ca servira dans la suite.

Pour montrer que $S^2 = 2$, on va montrer que $S^2 \geqslant 2$ et que $S^2 \leqslant 2$.

On commence par montrer par l'absurde que $S^2 \geqslant 2$. Supposons que $S^2 < 2$ et considérons un réel $\varepsilon > 0$, on va montrer que si ε est suffisammnt petit alors $(S+\varepsilon)^2 < 2$ ce qui montre que $S + \varepsilon \in A$ ce qui est absurde puisque S est un majorant de A. On y va :

$$(S+\varepsilon)^2 = S^2 + 2S\varepsilon + \varepsilon^2 < S^2 + 4\varepsilon + 2\varepsilon = S^2 + 6\varepsilon < 2\,, \text{ dès que } \varepsilon < \frac{2 - S^2}{6}.$$

Enfin, on montre par l'absurde que $S^2 \leqslant 2$. Supposons que $S^2 > 2$ et considérons un réel $\varepsilon > 0$, on va montrer que si ε est suffisamment petit alors $(S-\varepsilon)^2 > 2$ ce qui montre que $S - \varepsilon$ est un majorant de A [1], ce qui contredit que S est le plus petit majorant de A. On y va :

$$(S-\varepsilon)^2 - 2 = S^2 - 2S\varepsilon + \varepsilon^2 - 2 > S^2 - 2 - 2S\varepsilon > 0\,, \text{ dès que } \varepsilon < \frac{S^2 - 2}{2S}.$$

■

1. En effet, on a $x^2 < 2 < (S-\varepsilon)^2$ donc $x < S - \varepsilon$.

On peut à présent montrer le Lemme d'Archimède.

Démo du Lemme d'Archimède. Il faut démontrer que $\frac{x}{\varepsilon}$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. On procède par l'absurde. Supposons que $\frac{x}{\varepsilon}$ majore $\mathbb{N}$, ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ est majoré et admet donc une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$. Le réel $M-1$ n'est pas une borne supérieure de $\mathbb{N}$, donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > M-1$, mais alors $n+1 > M$, autrement dit M n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. Absurde. Conclusion : $\frac{x}{\varepsilon}$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, autrement il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$. ■

VI Intervalles de ℝ

Définition VI.1 On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

1. $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné appelé aussi *segment*),
2. $]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ (semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite),
3. $[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
4. $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert),
5. $[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$ (demi-droite fermée à gauche),
6. $]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (demi-droite ouverte à gauche),
7. $]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$ (demi-droite fermée à droite),
8. $]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (demi-droite ouverte à droite),
9. $\varnothing$ (ensemble vide),
10. $\mathbb{R}$ (droite réelle),

avec a et b des réels tels que $a \leqslant b$.

Exemple VI.1 Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0,1] \cup [1,5], \{\pi\}, [-3,-1] \cup]1,+\infty[, [-3,-1] \cap]1,+\infty[\quad ?$$

Justifier.

Proposition VI.1 — Caractérisation des intervalles. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $x, y \in A$ avec $x \leqslant y$, on a $[x,y] \subset A$.

Démonstration. Traitons le cas où A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires. La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles. Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta,\gamma]$. Vérifions que $]\delta,\gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta,\gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$. On a $[x_1,x_2] \subset A$ et donc $x \in A$. On en conclut que $]\delta,\gamma[\subset A \subset [\delta,\gamma]$ et donc que A est un intervalle. ■

Corollaire VI.2 Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathrm{Maj}(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathrm{Maj}(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration. Par définition :

$$\mathrm{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, x \leqslant M\}$$

Montrons que $\mathrm{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles. Soient M, M' deux éléments de $\mathrm{Maj}(E)$, (c'est à dire deux majorants de E) tels que $M \leqslant M'$. Il est clair que tout $P \in [M, M']$ est aussi un majorant de E donc un élément de $\mathrm{Maj}(E)$. Autrement dit, $[M, M'] \subset \mathrm{Maj}(E)$. La caractérisation des intervalles montrent que $\mathrm{Maj}(E)$ est un intervalle. Par définition, $\sup(E) \in \mathrm{Maj}(E)$. Il est aussi clair que $\mathrm{Maj}(E)$ est non bornée. ∎

R Le même raisonnement montre que $[M, +\infty[\subset \mathrm{Maj}(E)$, pour tout $M \in \mathrm{Maj}(E)$.

VII Densité

Définition VII.1 On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert rencontre A.

Nous montrerons plus tard la proposition suivante.

Proposition VII.1 Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Proposition VII.2 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons que tout segment ouvert $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geqslant 2$, $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, par le Lemme d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(b - a) \geqslant 2$ et alors $]na, nb[$ contient un élément x de $\mathbb{Z}$. Par suite, $x/n \in]a, b[$, ainsi $]a, b[$ contient un rationnel. ∎

Proposition VII.3 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Lemme VII.4 Soient $x, \varepsilon > 0$. Il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{x}{n} < \varepsilon$.

Démonstration. C'est le Lemme d'archimède ! En effet, l'inégalité souhaité est équivalente à l'inégalité $x < n\varepsilon$. ∎

Démonstration. Considérons le segment ouvert $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme précédent avec $\varepsilon = \frac{b-q}{2}$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{b - q}{2},$$

si bien que

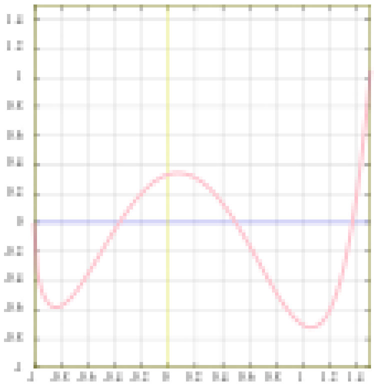
$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b.$$

La première inégalité vient simplement de ce que $a < q$ et $\frac{\sqrt{2}}{n} > 0$. Pour montrer, la seconde il suffit de vérifier qu'elle est impliquée par l'inégalité :

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q$$

Cette dernière est vérifiée par définition de n. Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde. Supposons que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel, mais alors $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q = \frac{\sqrt{2}}{n}$ est aussi rationnel puisque q est rationnel et l'ensemble des rationnels est stable par soustraction. De façon analogue, on aurait $n\frac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

R La démonstration de l'affirmation $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ sera faite dans le cours d'Algèbre-Géométrie 1.



2. Les applications de la variable réelle

Les définitions formelles d'application et de fonction ont été/seront vues et étudiées en Algèbre-Géométrie 1. Pour ce cours, on utilisera simplement les définitions I.1 et I.2 et on se limitera en pratique aux applications et aux fonctions de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Les définitions

Définition I.1 — Application. Une *application* f est la donnée d'un ensemble de départ E et d'un ensemble d'arrivée F et qui, à chaque $x \in E$ associe un unique $f(x) \in F$. Autrement dit, on a :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, \quad \text{tel que :} \quad y = f(x)$$

On note $f : E \to F$ et on écrit aussi $x \ni E \mapsto f(x) \in F$.

R Attention : Une application est la donnée d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée ! Ce n'est pas la donnée d'une formule du type $f(x) = \frac{3x+e^x}{1+\frac{\cos(x)}{12x+1}}$.

Définition I.2 — Fonction. Une *fonction* f est la donnée d'un ensemble de départ E et d'un ensemble d'arrivée F et qui, à **certain** $x \in E$ associe un unique $f(x) \in F$. L'ensemble des éléments $x \in E$ qui possède une image $f(x)$ s'appelle *le domaine de définition* $\mathcal{D}_f$ de f.

R Ainsi, une fonction n'est pas définie partout. Typiquement une fonction de la variable réelle (i.e $E = \mathbb{R}$) à valeurs réelles (i.e. $F = \mathbb{R}$) peut-être donnée par une formule du type $f(x)=\frac{3x+e^x}{1+\frac{\cos(x)}{12x+1}}$. La première question est alors de déterminer son domaine de définition.

En revanche, une application est définie partout. De manière générale, on préfère manipuler des applications plutôt que des fonctions. Il faut bien retenir que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction alors $f:\mathcal{D}_f\to\mathbb{R}$ est une application, et c'est ce dernier objet qui nous intéresse.

Deux exemples d'applications "faciles" et néanmoins importantes :

Définition I.3 — Applications constantes et application identité.

— Soit $f:E\to F$. L'application f est dite *constante* lorsqu'il existe $y_0\in F$ tel que :

$$\forall x\in E,\quad f(x)=y_0$$

— L'application $f_0:E\to E$ définie par $\forall x\in E, f_0(x)=x$ s'appelle l'application *identité* de E et se se note $f_0=\mathrm{Id}_E$.

Exemple I.1 On considère, juqu'à la fin de ce chapitre, les applications suivantes

1. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2$,
2. $f_2:]-\infty,0[\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=x^2$,
3. $f_3:]-\infty,0[\to[0,+\infty[$, $f_3(x)=x^2$.

A-t-on $f_1=f_2$?

Définition I.4 — Graphe d'une application. Soit $f:E\to F$ une application. On appelle *graphe* de f l'ensemble suivant

$$\mathrm{Graphe}(f)=\{(x,f(x)),x\in E\}\subset E\times F.$$

Exemple I.2 Dessiner les graphes de f_1, f_2 et f_3.

Définition I.5 — Image, antécédent. Soit $f:E\to F$ une application. Soient $x\in E$ et $y\in F$ tels que $y=f(x)$. On dit que y est ***l'****image* de x par f et que x est **un** *antécédent* de y par f. Si $A\subset E$, on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.
Autrement dit :

$$f(A)=\{y\in F\mid\exists x\in A, y=f(x)\}$$

L'image de f est $f(E)$.

Exemple I.3 Trouver l'image de 4 par f_1. Quels sont tous les antécédents de 4 par f_1 ? Que vaut $f_1([-1,5[)$?

Définition I.6 — Injectivité. Soit $f:E\to F$ une application. On dit que f est *injective* lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f. Autrement dit, f est injective lorsque :

$$\forall x,y\in E,\quad \text{si}\quad f(x)=f(y)\quad\text{alors}\quad x=y.$$

Exemple I.4 f_1 est-elle injective ? Et f_2 ?

Définition I.7 — Surjectivité. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *surjective* lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent.

$$\forall y \in b, \exists x \in E, \quad \text{tel que} \quad y = f(x)$$

Exemple I.5 f_1 est-elle surjective ?

Définition I.8 — Bijectivité. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *bijective* quand elle est à la fois injective et surjective.

Exemple I.6 Parmi f_1, f_2 et f_3, y a-t-il une application bijective ? Lesquelles ? Justifier.

Définition I.9 Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$, la *restriction* de f à A est l'application $\hat{f} : A \to F$, donnée par $\hat{f}(x) = f(x)$. On la note $f_{|A}$, quand le contexte est clair, on peut la noter f, malgré l'ambiguïté de la notation afin d'éviter une surcharge de notation.

Soit $B \supset f(E)$, la *corestriction* de f à B est l'application $\tilde{f} : E \to B'$, donnée par $\tilde{f}(x) = f(x)$. On appelle *prolongement* de f, toute application $g : C \to D$ tel que $C \supset E$, $D \supset F$ et pour tout $x \in E$, on a $g(x) = f(x)$.

II Opérations sur les applications

1 Somme et produit d'applications

Les applications que l'on considère sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est muni d'une addition et d'une multiplication. Nous allons pouvoir donner un sens à ces opérations pour les applications (dès qu'elles sont définies sur le même ensemble et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Définition II.1 Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. la *somme* de f et g comme l'application $s = f + g$ définie par : pour tout $x \in E$, $s(x) = f(x) + g(x)$,
2. la *produit* de f et g comme l'application $p = fg$ définie par : pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)g(x)$,
3. le *produit* de f par λ comme l'application $w = \lambda f$ définie par : pour tout $x \in E$, $w(x) = \lambda f(x)$.

Exemple II.1 Donner une partie de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle la somme des applications suivantes est bien définie : $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x+1)$.

2 Composition d'applications

Définition II.2 Soient $E, F, G \subset \mathbb{R}$, $f : E \to F$, $g : F \to G$. La *composée* de f et g est l'application $g \circ f : E \to G$ par :

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple II.2 Soient $f : x \in [0,+\infty[\mapsto \sqrt{x} \in [0,+\infty[$ et $g : x \in]-1,+\infty[\mapsto \ln(x+1) \in \mathbb{R}$. L'application $g \circ f$ est-elle bien définie ? Et $f \circ g$? En réduisant le domaine de définition de g et son ensemble d'arrivée, montrer que la composée de f avec cette nouvelle application est bien définie.

3 Application réciproque

Définition II.3 Soit $f : E \to F$ une application bijective. Il existe alors une unique application $g : F \to E$ tel que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

L'application g s'appelle *l'application réciproque ou la réciproque* de g. On note $g = f^{-1}$.

Démonstration. Voir le cours d'Algèbre-Géométrie 1. ∎

III Exemples classiques de fonctions

1 Les applications du second degré

Nous allons maintenant parler des applications du second degré et de leurs zéros.

Proposition III.1 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ possède des solutions si et seulement si $\Delta \geqslant 0$. Plus précisément :

1. si $\Delta > 0$, il y a deux solutions distinctes x_1 et x_2 données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une seule solution :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

et on a les relations :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Enfin, si $\Delta < 0$, soit f ne prend que des valeurs positives, soit elle ne prend que des valeurs négatives.

Démonstration. On écrit simplement que :

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right\},$$

et les conséquences s'en déduisent aisément. ■

2 Les applications polynomiales

Les *applications polynomiales* sont les applications définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui se présentent sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels donnés. Pour f non identiquement nulle on a $a_n \neq 0$ et on l'appelle le *coefficient dominant*.

3 Les fonctions rationnelles

Les *fonctions rationnelles* sont les fonctions qui se présentent sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{où } p, q \text{ sont des polynômes}$$

Si on note F, l'ensemble F des zéros de q, c'est à dire :

$$F = q^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$$

alors le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus F$. Ainsi $f : \mathbb{R} \setminus F \to \mathbb{R}$ est une application.

4 La fonction logarithme népérien

L'*application logarithme népérien* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une application qui vérifie $\ln(1) = 0$ et la propriété remarquable :

$$\forall x, y > 0, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Elle peut être définie au moyen de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u.$$

5 La fonction exponentielle

L'*application exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est l'application réciproque de ln dans le sens où : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que $e = \exp(1)$ est le nombre d'Euler.

L'application exponentielle vérifie la propriété remarquable :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Pour $a > 0$, on définit l'application sur $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x := \exp(x \ln(a)) \in]0, +\infty[$. Cela justifie la notation $\exp(x) = e^x$. On observe aussi que, quand x est un entier, $\exp(x \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^x = a \times a \times \ldots \times a$.

6 Les fonctions trigonométriques

Les *fonctions trigonométriques* cos, sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\} \quad \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

IV Propriétés remarquables des applications

1 Applications majorées, minorées et bornées

Définition IV.1 Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f:A\to\mathbb{R}$.

1. On dit que f est *majorée* lorsqu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in A$, on a $f(x)\leqslant M$. M est alors appelé un *majorant* de f.
2. On dit que f est *minorée* lorsqu'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in A$, on a $f(x)\geqslant m$. m est alors appelé un *minorant* de f.
3. On dit que f est *bornée* lorsque elle est à la fois majorée et minorée.

2 Applications monotones

Définition IV.2 Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f:A\to\mathbb{R}$.

1. On dit que f est *croissante* lorsque pour tout $(x,y)\in A^2$, si $x\leqslant y$ alors $f(x)\leqslant f(y)$.
2. On dit que f est *décroissante* lorsque pour tout $(x,y)\in A^2$, si $x\leqslant y$ alors $f(y)\leqslant f(x)$.
3. On dit que f est *monotone* lorsque f est croissante ou décroissante.

De même, on définit les applications *strictement croissantes* et *strictement décroissantes* en remplaçant partout $\leqslant$ par $<$ et on parle de même d'applications *strictement monotones*.

Exercice 2.1 Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 1$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'application $x\in\mathbb{R}\mapsto x^n\in\mathbb{R}$ est croissante. Pour ces n, l'application est-elle strictement croissante ? Mêmes questions pour $x\in]0,+\infty[\mapsto x^n\in\mathbb{R}$. ▪

Exercice 2.2 L'application $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\mapsto\frac{1}{x}\in\mathbb{R}$ est-elle décroissante ? ▪

Proposition IV.1 — ⋆⋆. Soit $f:A\to\mathbb{R}$. Alors f n'est pas monotone si et seulement s'il existe $(x,y,z)\in A^3$ vérifiant $x<y<z$ et tels que

$$\Big(f(x)<f(y) \quad \text{et} \quad f(z)<f(y)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(f(y)<f(x) \quad \text{et} \quad f(y)<f(z)\Big).$$

3 Fonctions périodiques

Notation : On note $A+p:=\{x+p, x\in A\}$.

Définition IV.3 Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est *périodique* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$A + p = A, \quad \forall x \in A, \quad f(x+p) = f(x).$$

Dans ce cas, on dit que p est une *période*.

Proposition IV.2 — ⋆⋆. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application périodique. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des périodes (auquel on ajoute 0), alors, si $p_1 \in \mathcal{P}$ et $p_2 \in \mathcal{P}$, on a aussi $p_1 \pm p_2 \in \mathcal{P}$. En particulier, f possède une période strictement positive.

Définition IV.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application périodique. Si $\mathcal{P} \cap]0, +\infty[$ possède un minimum (non nul), ce nombre est appelé *la période* de f.

Exemple IV.1 Les applications cos et sin admettent pour périodes les nombres $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Leur période est 2π. La période de l'application tan est π.

4 Symétries

Définition IV.5 Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f est *paire* si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.
2. On dit que f est *impaire* si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

Exercice 2.3 L'application $f : [0, +\infty[\ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est-elle paire ? Et l'application $g :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ni x \mapsto \frac{x^2-4}{1+x^{20}} \in \mathbb{R}$?

Proposition IV.3 — ⋆. Soient $S_{(Oy)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et $S_O : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie centrale de centre $(0, 0)$.

1. Une application f est paire si et seulement si $S_{(Oy)}(\text{Graphe}(f)) = \text{Graphe}(f)$.
2. Une application f est impaire si et seulement si $S_O(\text{Graphe}(f)) = \text{Graphe}(f)$.

Définition IV.6 Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $a \in A$. L'application f (aussi le graphe de f) est *symétrique par rapport à l'axe a* quand :

$$\forall x \in A, \quad \text{on a} \quad 2a - x \in A \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

L'application f (aussi le graphe de f) est *symétrique par rapport au point (a, b)* quand :

$$\forall x \in A, \quad \text{on a} \quad 2a - x \in A \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

Exemple IV.2 L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est symétrique par rapport à l'axe $x = -2$. En effet, $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à -2 et :

$$f(2a - x) = f(-4 - x) = (-4 - x)^2 + 4(-4 - x) + 6 = \ldots = x^2 + 4x + 6 = f(x)$$

Exemple IV.3 L'application $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ est symétrique par rapport au point $(2,1)$. En effet, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ est bien symétrique par rapport à 2 et :

$$f(2a-x)=f(4-x)=\frac{(4-x)-3}{(4-x)-2} \quad \text{et} \quad 2b-f(x)=2-f(x)=2-\frac{x-3}{x-2}$$

Une fois le calcul simplifié, on observe que ces deux quantités sont égales.

Proposition IV.4 Soit $f:A\to\mathbb{R}$ une application. Soit $a\in\mathbb{R}$. On note $B=A-a$.

1. L'ensemble A est symétrique par rapport à a si et seulement si l'ensemble B est symétrique par rapport à 0.
   On définit $g:B\to\mathbb{R}$ par $g(h)=f(a+h)$.
2. Le graphe de f symétrique par rapport à l'axe a si et seulement si la fonction $g:B\to\mathbb{R}$ est paire.
   On définit $k:B\to\mathbb{R}$ par $k(h)=f(a+h)-b$.
3. Le graphe de f symétrique par rapport au point (a,b) si et seulement si la fonction $k:B\to\mathbb{R}$ est impaire.

Démonstration. On pose $x=a+h$ ce qui est équivalent à $h=x-a$. On a bien $x\in A \Leftrightarrow h\in B$.

L'ensemble A est symétrique par rapport à A lorsque : L'assertion

$$x\in A\Rightarrow 2a-x\in A$$

est vérifiée, cette assertion est équivalente à l'assertion :

$$a+h\in A\Rightarrow a-h\in A$$

elle même équivalente à

$$h\in A-a\Rightarrow -h\in A-a$$

elle même équivalente à

$$h\in B\Rightarrow -h\in B$$

elle même équivalente à l'assertion B est symétrique par rapport à 0.

Si f est symétrique par rapport à l'axe $x=a$:

$$g(-h)=f(a-h)=f(2a-(a+h))=f(a+h)=g(h)$$

Donc g est paire.

Supposons g paire alors :

$$f(2a-x)=f(2a-(a+h))=f(a-h)=g(-h)=g(h)=f(a+h)=f(x)$$

Donc f est symétrique par rapport à l'axe $x=a$.

Si f par rapport au point (a,b) :

$$k(-h)=f(a-h)-b=f(2a-(a+h))-b=b-f(a+h)=-k(h)$$

Donc g est impaire.

On laisse l'implication g impaire implique f symétrique en exercice. ∎

On reprend les exemples précédents.

Exemple IV.4 L'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x)=x^2+4x+6$ est symétrique par rapport à l'axe $x=-2$. Car

$$f(a+h)=f(-2+h)=\ldots=h^2+2$$

qui est clairement paire.

Exemple IV.5 L'application $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$ est symétrique par rapport au point $(2,1)$. Car

$$f(a+h)-b=f(2+h)-1=\ldots=-\frac{1}{h}$$

qui est clairement impaire.

Exercice 2.4 Déterminer un axe de symétrie pour le graphe de $\mathbb{R}\ni x\mapsto x^2+3x-4\in\mathbb{R}$. ▪

Exercice 2.5 Trouver un centre de symétrie pour l'application $\mathbb{R}\ni x\mapsto x^3-3x^2+4x-2\in\mathbb{R}$. En déduire un point par rapport auquel le graphe de l'application $\mathbb{R}\ni x\mapsto x^3-3x^2+4x\in\mathbb{R}$ est symétrique. ▪

V Limite et continuité

Pour les définitions de limite et de continuité, on va reprendre la définition de terminale. La définition universitaire, avec les ε et les η, viendra au second semestre.

1 Définition de limite d'une application en un point $a\in I$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou éventuellement une union d'intervalles). On dit qu'un réel a est *adhérent à* I lorsque pour tout intervalle $J\neq\{a\}$, contenant a, on a $J\cap I\neq\varnothing$. On dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à I lorsque I n'est pas majorée (resp. minorée).

Définition V.1 On dit qu'un réel a est *intérieur* à intervalle I lorsqu'il existe un intervalle ouvert $J\ni a$ tel que $J\subset I$.

(R) Autrement dit, a "n'est pas au bord" de I mais à l'intérieur !

▪ **Exemple 2.1** Les éléments et les bornes de I sont adhérentes à I. Ainsi, $2,3$ et $+\infty$ sont adhérents à $]2,+\infty[$. ▪

Définition V.2 Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et a adhérent à I. On dit que $f:I\to\mathbb{R}$ *tend vers ℓ en a* lorsque :
pour tout intervalle J contenant ℓ, il existe un intervalle K contenant a, tel que $f(K\cap I)\subset J$. On dit alors que f *admet une limite en a* et que cette limite est ℓ. On

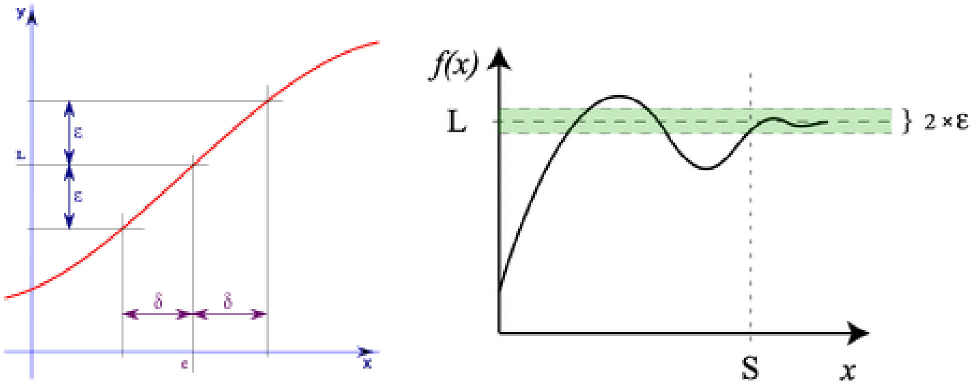


FIGURE 2.1 – Illustration de la notion de limite.
Gauche : Pour tout intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, il existe un intervalle $]x-\delta, x+\delta[$ tel que $f(]x-\delta, x+\delta[) \subset]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$
Droite : Pour tout intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, il existe un intervalle $]S, +\infty[$ tel que $f(]S, +\infty[) \subset]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

> note :
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

2 Définition de la continuité d'une application

> **Définition V.3** On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue en a* lorsque f tend vers $f(a)$ en a. On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout point de I.

■ **Exemple 2.2** Quelques exemples et non exemples.
- Les fonctions polynomiales, rationnelles, logarithme, exponentielle, puissance, racine, racine n-ièmes, trigonométriques sont continues sur leurs ensembles de définition.
- La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais n'est continue en aucun point $a \in \mathbb{Z}$.
- L'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point.

■

3 Propriétés de la limite

Proposition V.1 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, a adhérent à I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les fonctions f, g admettent des limites en a, notées $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $f+g \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1+\ell_2$, $fg \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\ell_2$ et $\lambda f \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell_1$. Enfin, si $\ell_2 \neq 0$ alors $f/g \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1/\ell_2$.

Proposition V.2 Soient $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$, a adhérent à I et ℓ adhérent à J. Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(y) \xrightarrow[y\to \ell]{} L$ alors $f \circ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

R Lorsque l'on peut répondre à la question quelle est la limite de f en a en utilisant uniquement les règles ci-dessus, comme par exemple :

$$\text{quelle est la limite de :} \qquad x \mapsto \frac{e^{x^2}+x^3+\pi}{\ln(x+1)+\frac{x^7+1}{x^3}} \qquad \text{en } 2\,?$$

On dit que la "forme de la limite est déterminée", sinon on dit que la limite est "indéterminée". Comme par exemple :

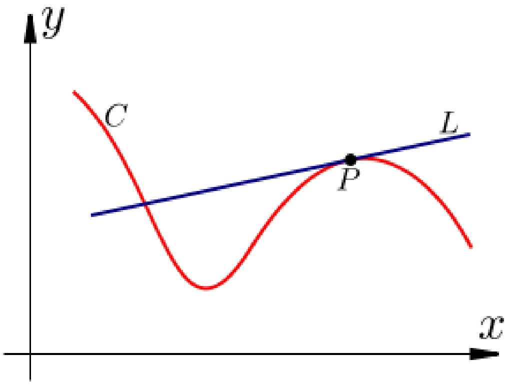
$$\text{la limite de :} x \mapsto \frac{\sin x}{x} \qquad \text{en } 0\,? \qquad \text{la réponse est } 1\dots$$

Dans ce cas, il faut lever l'indétermination. On verra plus tard comment faire.

4 Propriétés de la continuité

Proposition V.3 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les fonctions f, g sont continues en a alors $f+g$, λf et fg sont continues en a. Si, de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a.

Proposition V.4 Soient $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$. Si les fonctions f, g sont continues alors $f \circ g$ est continue.



3. Dérivabilité

I Définition et premiers exemples

1 Définition

Définition I.1 — ⋆⋆. On dit que f est *dérivable en* a lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : l'application $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. Un tel ℓ est unique et on le note $f'(a)$ et on l'appelle le *nombre dérivée de f en a*.

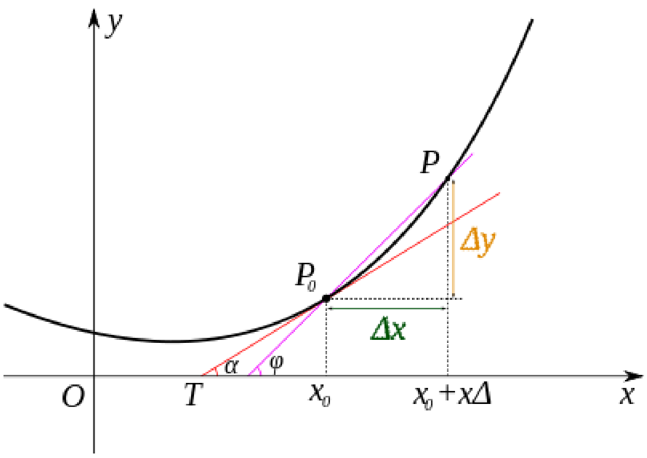


FIGURE 3.1 – Illutration de la notion de dérivation

Définition I.2 On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.Si $\mathcal{D}'(f)$ est l'ensemble des points de I où est f est dérivable, l'application

$\mathcal{D}'(f) \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ est appelée *application dérivée* de f.

2 Premiers exemples

Proposition I.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Démonstration. On commence avec des petites valeurs de n :

$n =$	$f(x+h)-f(x)$	$(f(x+h)-f(x))/h$	$f'(x)$
1	$x+h-x=h$	1	1
2	$(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$	$2x+h$	$2x$
3	$(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3$	$3x^2+3xh+h^2$	$3x^2$

Pour faire n quelconque, on utilise la formule du binôme de Newton.

$$(x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k h^k x^{n-k} = nhx^{n-1} + h^2 g(h)$$

où $g(h)$ est une application polynomiale qui admet donc une limite [1] lorsque h tend vers 0. Il suffit alors de diviser par h et de passer à la limite pour conclure. ■

Proposition I.2 L'application $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration. On fait le calcul de $f(x+h)-f(x)$ en mettant au même dénominateur, et on obtient :

$$f(x+h)-f(x) = \frac{-h}{x(x+h)}$$

On divise par h et on passe à limite quand h tend vers 0. ■

Proposition I.3 L'application $[0,+\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$, mais pas en 0 ; et on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. On fait le calcul de $f(x+h)-f(x)$ en utilisant l'astuce de la quantité conjuguée, et on obtient :

$$f(x+h)-f(x) = \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On divise par h et on passe à limite quand h tend vers 0. ■

1. Il n'est pas nécessaire de la connaitre mais cette limite est $C_n^2 x^{n-2}$

3 Lien dérivation – continuité

Proposition I.4 Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Admis. ■

(R) La réciproque est fausse en général. Contre-exemple : $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue en zéro mais elle n'est pas dérivable en ce point.

4 Tangente à une courbe

Définition I.3 — Tangente. Si f est dérivable en a, on appelle *tangente au graphe de f en $(a, f(a))$* la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

5 Dérivée à gauche et à droite

Définition I.4 On dit que f est *dérivable à gauche* en a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell^- \in \mathbb{R}$$

et on note $\ell^- := f'_g(a)$. De même on définit la *dérivée à droite* en a notée $f'_d(a)$.

Proposition I.5 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et

$$f'_g(a) = f'_d(a)$$

▪ **Exemple 3.1**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + 1, & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

f est dérivable en 0 ssi $a = 0$. ▪

II Propriétés

1 Dérivées de la somme et du produit

Proposition II.1 — ⋆. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$, fg et λf sont dérivables en a, de dérivée respectives $f'(a) + g'(a)$, $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ et $\lambda f'(a)$.

Démonstration. On commence par la somme :

$$f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x)) = f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$$

On divise ensuite par h, et on passe à la limite lorsque $h \to 0$. Pour le produit.

$$\begin{aligned}
f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x) \\
&= f(x+h)\Big(g(x+h)-g(x)\Big)+g(x)\Big(f(x+h)-f(x)\Big) \\
\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= f(x+h)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite lorsque $h \to 0$. Le cas de λf est laissé en exercice. ■

Corollaire II.2 Vous savez à présent dériver une application polynomiale.

2 Dérivée de la composée

Proposition II.3 — $\star$. Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Démonstration admise. ■

3 Dérivée de l'inverse

En combinant la dérivée de l'application inverse et la proposition précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition II.4 — $\star$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. On pose :

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I, \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Démonstration. On note $\mathrm{inv} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$. Par définition, on a : $g = \mathrm{inv} \circ f$, le théorème de dérivation des applications composées montre que g est dérivable sur $]a-\eta, a+\eta[\cap I$. On applique ensuite la formule de dérivation des applications composées, on obtient :

$$g'(x) = \mathrm{inv}'\big(f(x)\big)f'(x)$$

Or, $\mathrm{inv}'(y) = -\frac{1}{y^2}$. On obtient donc la formule souhaitée. ■

4 Dérivée d'un quotient

En utilisant la dérivée du produit et de l'inverse, on en déduit la dérivée d'un quotient.

Proposition II.5 — $\star$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a. Alors, $\frac{g}{f}$ est dérivable en a, de dérivée

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - f(a)g'(a)}{f(a)^2}.$$

Démonstration. On note h l'application telle que $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ qui est bien définie sur $]a-\eta, a+\eta[\cap I$. Le théorème de dérivation de l'inverse montre que h est dérivable sur $]a-\eta, a+\eta[\cap I$. Le théorème de dérivation des produits montre que $gh = \frac{g}{f}$ est dérivable sur $]a-\eta, a+\eta[\cap I$. Enfin, en appliquant la formule de dérivation des produits, puis celle de dérivation des inverse, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f}\right)' &= (gh)' \\
&= g'h + gh' \\
&= \frac{g'}{f} - \frac{gf'}{f^2} \\
&= \frac{g'f - gf'}{f^2}
\end{aligned}$$

■

Corollaire II.6 Vous savez à présent dériver une fonction rationnelle.

5 Dérivées liées au logarithme

Proposition II.7 L'application $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Si f est une application dérivable et strictement positive sur un intervalle ouvert I non vide, alors $\ln f$ est dérivable sur I et de dérivée $\frac{f'}{f}$.

Démonstration. On admet que l'application $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est l'application inverse. La suite est une application directe du théorème de dérivation des composées. ■

6 Dérivées liées à l'exponentielle

Proposition II.8 L'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. Si f est une application dérivable sur un intervalle ouvert I non vide, alors $\exp(f)$ est dérivable sur I et de dérivée $f' \exp(f)$.

Démonstration. On admet que l'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vérifie $\exp' = \exp$. La suite est une application directe du théorème de dérivation des composées. ■

7 Dérivées liées aux applications trigonométriques

Proposition II.9 Les applications $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. Si f est une application dérivable sur un intervalle ouvert I non vide, alors $\cos(f)$ et $\sin(f)$ sont dérivables sur I et de dérivées respectives $-f'\sin(f)$ et $f'\cos(f)$.

Démonstration. idem. ∎

On pourrait faire un énoncé similaire pour les applications données par $\tan(f)$. On se contente de donner l'énoncé pour l'application tangente.

Proposition II.10 On note $D = \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + k\mathbb{Z}$. L'application tangente $\tan : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur son domaine de définition D et, pour tout $x \in D$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Démonstration. Par définition, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Le théorème de dérivation des quotients montre que tan est dérivable sur son domaine de définition et que :

$$\begin{aligned}
\tan' &= \frac{\cos\sin' - \sin\cos'}{\cos^2} \\
&= \frac{\cos\cos + \sin\sin}{\cos^2} \\
&= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2} \\
&= 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} \\
&= 1 + \tan^2
\end{aligned}$$

∎

Corollaire II.11 Être capable de trouver le domaine de dérivabilité d'une application donnée à l'aide de polynômes, logarithme, exponentielle, racine carrée et applications trigonométriques ! et de calculer sa dérivée.

Exemple II.1 Donner un domaine de définition pour l'application $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et étudier sa dérivabilité.

8 Deux Tableaux des premières dérivées usuelles

Fonctions	Domaine	dérivée
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$\exp x$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
$\alpha \in \mathbb{R}$, x^α	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Fonction	dérivée
$\cos(f)$	$-\sin(f)f'$
$\sin(f)$	$\cos(f)f'$
$\exp(f)$	$\exp(f)f'$
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$
$\alpha \in \mathbb{R}$, f^α	$\alpha f^{\alpha-1}f'$

9 Levée d'indétermination

On rappelle que

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une forme indéterminée ! On peut donc utiliser ses connaissances en dérivation de fonctions pour lever des indéterminations.

■ **Exemple 3.2** Par exemple :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^7 + 5x^4 - 6}{x-1} = 7 + 20 = 27.$$

■

10 La règle de l'Hôpital

La proposition suivante est très pratique pour lever des indéterminations.

Proposition II.12 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a adhérent à I deux fonctions dérivables. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur I et que :

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} 0, \qquad g(x) \underset{x\to a}{\to} 0, \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a}{\to} \ell$$

Alors :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \ell$$

■ **Exemple 3.3** Quelques exemples d'utilisation de la règle de l'Hôpital (les hypothèses de l'énoncé sont bien vérifiées !).

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$

■

III Maximum, minimum

1 Définition

Définition III.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f *atteint en a un maximum* (resp. *minimum*) (*global* [a]) de f, lorsque :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)),$$

Dans ce cas, on dit que f admet un maximum (resp. un minimum) (global) en a et ce maximum (resp. minimum) (global) vaut $f(a)$.

a. Le mot global est souvent sous-entendu.

Définition III.2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit I un intervalle non vide et a un **point intérieur** à I. On dit que f *atteint en a un maximum* (resp. *minimum*) *local* de f, lorsque :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)),$$

Dans ce cas, on dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a et ce maximum (resp. minimum) local vaut $f(a)$.

R Soit a est un point intérieur à I. Si f atteint un maximum global en a alors f atteint un maximum local en a. La réciproque est fausse. Faire des dessins.

R Par défaut, l'expression maximum signifie maximum global. Le mot global étant sous-entendu. Idem pour l'expression minimum. A contrario, le mot local ne doit pas être oublié dans l'expression maximum/minimum local !

2 Un extremum est un point critique

Proposition III.1 — ⋆. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit I un intervalle non vide et a un **point intérieur** à I. On suppose que a est un maximum (resp. minimum) local de f et que f est dérivable en a. Alors, on a $f'(a) = 0$.

Démonstration. Il existe un $\eta > 0$ tel que pour $x > a$ et $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0.$$

En passant à la limite (à droite), il vient $f'(a) \leqslant 0$. De même pour $x < a$ et $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0,$$

et donc, par passage à la limite (à gauche), $f'(a) \geqslant 0$. Ainsi, $f'(a) = 0$. ■

R La réciproque de la proposition précédente est fausse. L'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ a une dérivée nulle en 0 mais 0 n'est pas un maximum local.

Définition III.3 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit I un intervalle non vide. On dit que a est un *point critique* f lorsque $f'(a) = 0$.

R La recherche des points critiques d'une fonction est souvent une étape dans le recherche des extrema locaux d'une application.

■ **Exemple 3.4** On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x \in \mathbb{R}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Les points critiques de f sont donc les points 1 et -1. On étudie à présent f autour de 1, en calculant :

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h) = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 3 - 3h = -2 + 3h^2 + h^3 = -2 + h^2(3+h)$$

Or,

$$f(1+h) = -2 + h^2(3+h) > -2 \text{ si } h \neq 0 \text{ et } 3+h > 0$$

en particulier, si $h \in [-1,1] \setminus \{0\}$ alors :

$$f(1+h) = -2 + h^2(3+h) > -2 \text{ si } h \neq 0 \text{ et } 3+h > 0$$

Par conséquent, -2 est un minimum local atteint en 1. On procède de la même façon en -1 :

$$f(-1+h) = (-1+h)^3 - 3(-1+h) = h^3 - 3h^2 + 3h - 1 + 3 - 3h = 2 - 3h^2 + h^3 = 2 - h^2(3-h)$$

Or,

$$f(-1+h) = 2 - h^2(3-h) < 2 \text{ si } h \neq 0 \text{ et } 3-h > 0$$

en particulier, si $h \in [-1,1] \setminus \{0\}$ alors :

$$f(-1+h) = 2 - h^2(3-h) < 2 \text{ si } h \neq 0 \text{ et } 3-h > 0$$

Par conséquent, 2 est un maximum local atteint en -1. ■

R Dans la prochaine partie, nous allons voir que le signe de f' permet de dresser le tableau de variations de f. On verra ainsi que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ puis strictement décroissante sur $[-1,1]$ et enfin strictement croissante sur $[1,+\infty]$. Ceci sera une autre méthode pour montrer que -2 est un minimum local atteint en 1 et que 2 est un maximum local atteint en -1.

Théorème III.2 — Théorème des extrémas. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

R On rappelle que dérivable implique continue.

Démonstration admise. ■

IV Accroissements finis et applications

1 Théorème de Rolle

Théorème IV.1 — ⋆⋆ **Théorème de Rolle.** Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Par le théorème des extrémas simplifiés, f admet un maximum global et un minimum global. Si ce maximum ET ce minimum sont tous les **deux** atteints en a et b, comme $f(a) = f(b)$ alors f est constante et la conclusion s'ensuit. Sinon, il y a **un** extremum global atteint en $c \in]a,b[$. Cet extremum est aussi un extremum local. On a, par la Proposition III.1, $f'(c) = 0$. ∎

2 Théorème des accroissements finis

Théorème IV.2 — ⋆⋆ **Théorème des accroissements finis.** Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à l'application définie par :

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

En effet, on a $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. Il existe donc un $c \in]a,b[$ tel que :

$$g'(c) = 0 \quad \text{mais} \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On obtient donc :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

∎

3 Constance

Proposition IV.3 — ⋆. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée nulle. Alors f est constante.

Démonstration. Soient $a,b \in I$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[a,b]$, on obtient qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$$

D'où le résultat. ∎

4 Monotonie

Proposition IV.4 — ⋆. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I croissante (resp. décroissante). Alors la dérivée de f est positive (resp. négative) sur I.

Démonstration. On fait uniquement le cas f croissante. Le cas f décroissante se déduit de l'affirmation : f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante. Supposons f croissante, on a alors, pour tout $h \neq 0$ (suffisamment petit) :

$$\text{Si } h > 0 \text{ alors} \quad f(x+h) - f(x) \geqslant 0 \text{ et si } h < 0 \text{ alors} \quad f(x+h) - f(x) \leqslant 0.$$

Ainsi, on a pour tout $h \neq 0$ (suffisamment petit) :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

On passe à la limite quand $h \to 0$ et on obtient le résultat. ■

Proposition IV.5 — ⋆. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée positive (resp. strictement positive). Alors f est croissante (resp. strictement croissante).

Démonstration. On fait uniquement le cas f' positive. Le cas f' négative se déduit de l'affirmation : f' est positive si et seulement si $(-f)'$ est négative. Soient $a, b \in I$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$, on obtient qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0$$

D'où le résultat. ■

▪ **Exemple 3.5** Tracer la fonction $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x \in \mathbb{R}$, en déduire l'existence de deux extremas locaux. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Un tableau de signe de $x \mapsto x^2 - 1$, montre que f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ puis strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et enfin strictement croissante sur $[1, +\infty]$. Ceci sera une autre méthode pour montrer que -2 est un minimum local atteint en 1 et que 2 est un maximum local atteint en -1. ▪

Exercice 3.1 Donner un exemple d'application strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en au moins un point. ▪

▪ **Exemple 3.6** Montrons que $]0, \pi] \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.
On pose $g(x) =$ le numérateur de $f'(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. On a :

$$f' = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \qquad g' = (x\cos(x) - \sin(x))' = -x\sin(x).$$

Donc g est décroissante sur $]0, \pi[$, donc $g(x) \leqslant g(0) = 0$. Donc $f' < 0$, donc f est décroissante. ▪

Exercice 3.2 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geqslant x$.

Exercice 3.3 Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

V Dérivabilité des applications réciproques

On donne deux versions de ce théorème, une pour les intervalles ouverts et une pour les intervalles fermés.

Proposition V.1 — $\star$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I. Alors $J := f(I)$ est un intervalle ouvert, $f : I \to J$ est bijective, f est strictement croissante (resp. décroissante) et $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J et, pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Démonstration admise. ■

VI Études de quelques applications usuelles

1 Les applications du second degré

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application du second degré définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. Supposons que $a > 0$.

Proposition VI.1 f est une application dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue sur $\mathbb{R}$), strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$. Son unique minimum est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et il vaut $c - \frac{b^2}{4a}$.

2 L'application logarithme

On rappelle que le logarithme népérien est défini par :

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u.$$

R *On admet que* $\ln$ *est bien définie et dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et de dérivée* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, *pour tout* $x > 0$. L'application $\ln$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle est aussi continue car dérivable. On observe que $\ln(1) = 0$.

On peut à présent démontrer la "propriété remarquable du logarithme".

Proposition VI.2 Pour tout $x, y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration. Soit $y > 0$ et, pour $x > 0$, $f_y(x) = \ln(xy)$. Par composition, f_y est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_y'(x) = \frac{1}{x} = \ln'(x)$. Il s'ensuite que $f_y - \ln$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour tout $y > 0$, il existe donc $c_y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + c_y$. L'application $c(y) = \ln(xy) - \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $c'(y) = \frac{1}{y}$ si bien qu'il existe une constante a telle que, pour tout $y > 0$, $c(y) = \ln(y) + a$. On a $a = c(1) = 0$. ■

3 L'application exponentielle

L'application $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, étant dérivable, de dérivée strictement positive, de limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Elle est une bijection. Sa bijection réciproque est $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Proposition VI.3 L'application exp est dérivable par la Proposition V.1 et sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. L'application exp est strictement croissante et $\lim_{x \to -\infty} \exp = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, elle vérifie pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration. On utilise la formule de dérivation d'une application réciproque :

$$\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp(y))} = \exp(y)$$

Le reste c'est facile. C'est une conséquence de la Proposition VI.2. ■

4 Les fonctions puissances

Définition VI.1 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on pose : $x^a = \exp(a \ln(x))$.

R Si $a = 0$, on a $x^0 = 1$.

Proposition VI.4 Soit $a > 0$ et $f :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^a \in]0, +\infty[$. L'application f est strictement croissante et dérivable de dérivée $f'(x) = a x^{a-1}$. Elle tend vers 0 en 0, vers $+\infty$ en $+\infty$.

Démonstration. La formule de dérivation est une conséquence de la Proposition II.3. Par suite, $f' > 0$, ainsi f est strict-croissante. Pour les limites, commençons par la limite en $+\infty$, ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et exp tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. La démonstration pour la limite en zéro est similaire. ■

R On peut prolonger f en 0 par $f(0) = 0$, on obtient une application continue. Par contre, f est dérivable en 0 si et seulement si $a \geqslant 1$.

Proposition VI.5 Soit $a<0$ et $f:]0,+\infty[\ni x\mapsto x^a\in]0,+\infty[$. L'application f est strictement décroissante et dérivable de dérivée $f'(x)=ax^{a-1}$. Elle tend vers $+\infty$ en 0, vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. Idem proposition précédente. ■

Proposition VI.6 On a, pour tout $a>0$: $\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x}=0$ et $\lim_{x\to 0} x^a\ln(x)=0$.

Démonstration admise. ■

R On fera la version suite de ce théorème dans le chapitre sur les suites réelles.

VII Les fonctions réciproques des fonctions $\sin,\cos,\tan,\cosh,\sinh,\tanh$

1 Les applications sinus et cosinus

On admet que les applications $\sin$ *et* $\cos$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$*, dérivables sur* $\mathbb{R}$*, de période* 2π *et que* $\cos'=-\sin$*,* $\sin'=\cos$.

On rappelle les valeurs classiques :

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Ainsi que les symétries classiques :

$$\begin{array}{llcrcrcr}
\forall\theta\in\mathbb{R}, & \sin(\theta) & = & \sin(\pi-\theta) & = & -\sin(-\theta) & = & -\sin(\theta+\pi)\\
\forall\theta\in\mathbb{R}, & \cos(\theta) & = & -\cos(\pi-\theta) & = & \cos(-\theta) & = & -\cos(\theta+\pi)\\
\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}, & \tan(\theta) & = & -\tan(\pi-\theta) & = & -\tan(-\theta) & = & \tan(\theta+\pi)
\end{array}$$

et la relation classique :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$$

et les relations moins classiques :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \sin(\pi/2-\theta)=\cos(\theta),\qquad\text{et}\qquad \cos(\pi/2-\theta)=\sin(\theta)$$

On rappelle aussi l'allure du graphe de ses 3 fonctions.

En particulier, il découle que :

1. sin et tan sont impaires ;
2. cos est paire.

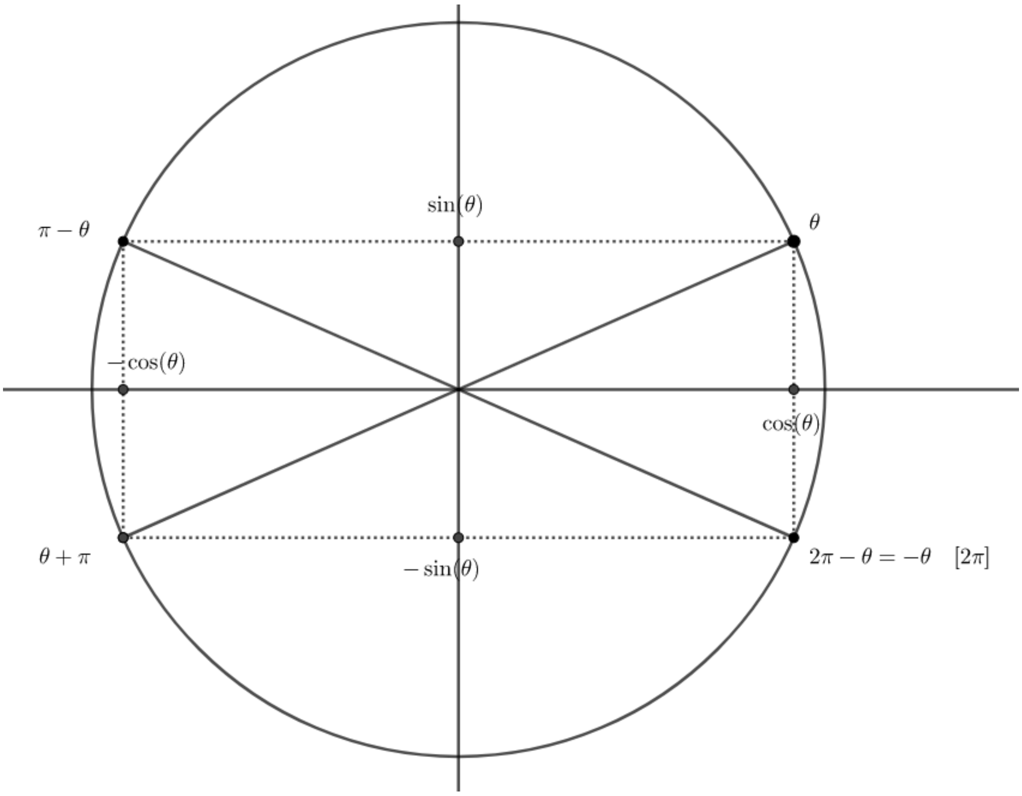


FIGURE 3.2 – Les symétries sur le cercle unité

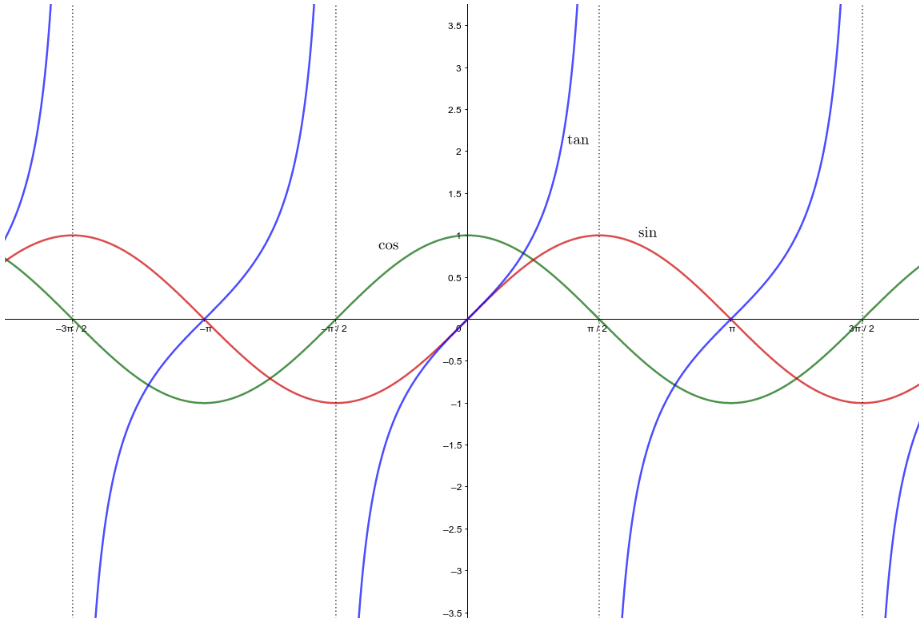


FIGURE 3.3 – Les graphes de sin, cos et tan

3. sin et cos sont 2π-périodiques.
4. tan est π-éeriodique.

Pour terminer, on rappelle les équivalences suivantes :

— $\sin(x) = \sin(\theta_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \theta_0 + 2k\pi$

— $\cos(x) = \cos(\theta_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\theta_0 + 2k\pi$

R Il y a d'autres formules de trigo utiles.

Proposition VII.1 L'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est une bijection strictement croissante. Sa bijection réciproque est notée arcsin et elle est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On a $\sin' = \cos$. En particulier, $\sin'$ est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le théorème de dérivabilité des applications réciproques montre que $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est bijective (strictement croissante), on note arcsin son inverse. Soit $y \in]-1,1[$, on note x l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin(x) = y$. On a :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \text{car } \cos(x) > 0.$$

■

Proposition VII.2 L'application $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ est une bijection strictement décroissante. Sa bijection réciproque est notée arccos et elle est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. L'argument de départ est le même que pour sin, on ne refait que le calcul de la dérivée de arccos. Soit $y \in]-1,1[$, on note x l'unique réel de $]0,\pi[$ tel que $\cos(x) = y$. On a :

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \text{car } \sin(x) > 0.$$

■

2 L'application tangente

Proposition VII.3 L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante et dérivable, dont la dérivée vaut $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

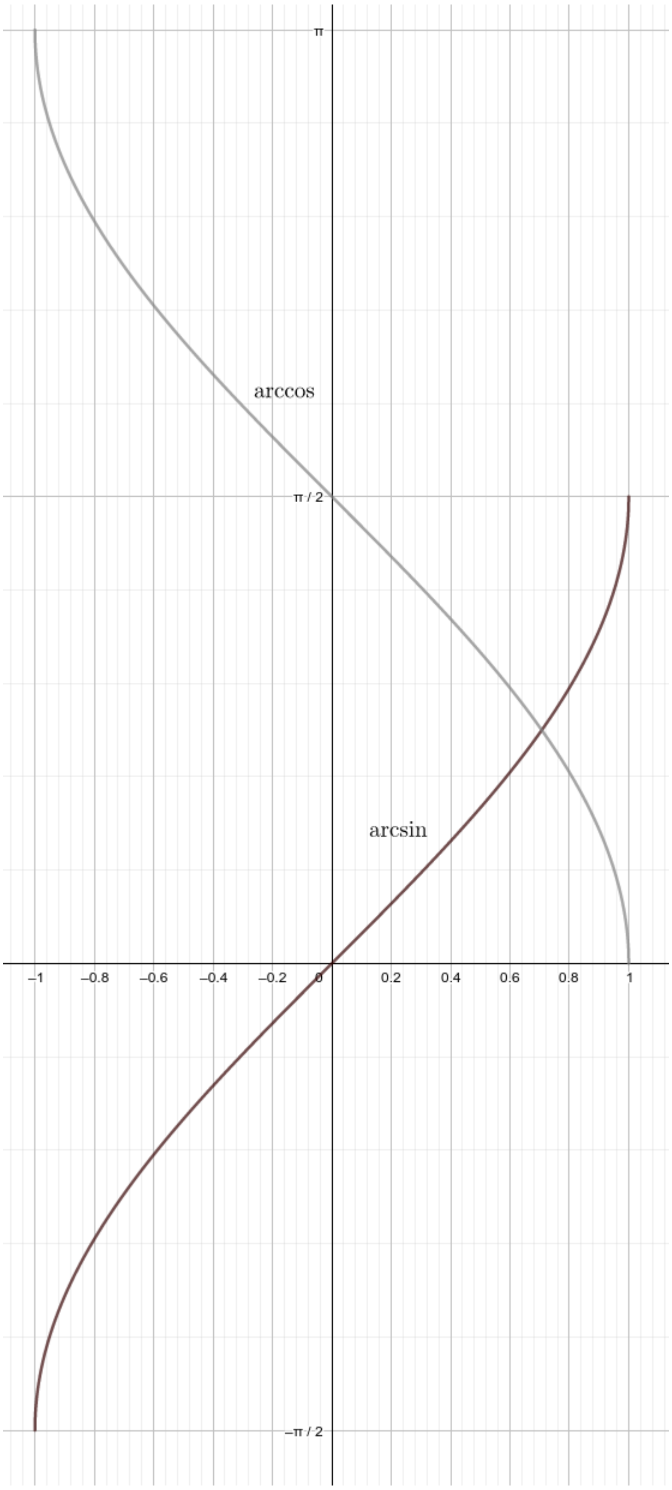


FIGURE 3.4 – Les graphes de arcsin, arccos

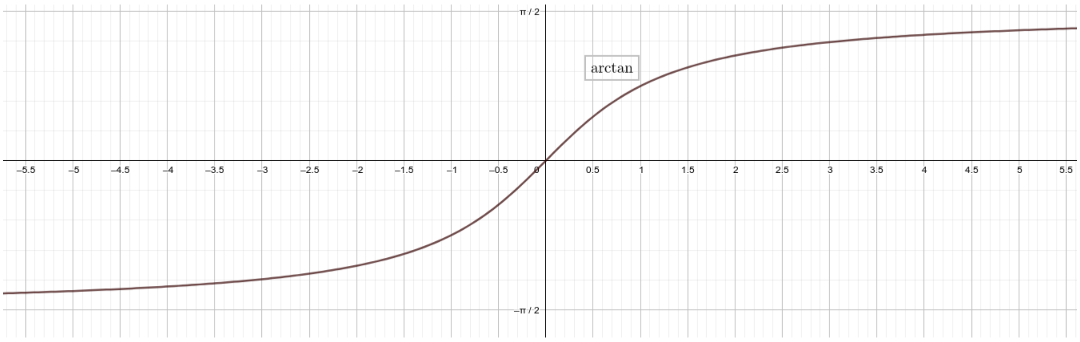


FIGURE 3.5 – Le graphe de de arctan

Sa bijection réciproque est notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. L'argument de départ est le même que pour sin, on ne refait que le calcul de la dérivée de arctan. On déjà vu que : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Ensuite, on calcule, soit $y \in \mathbb{R}$, on note x l'unique réel tel que $y = \tan(x)$, on a : $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$. ■

3 Les applications sinus et cosinus hyperboliques

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La proposition suivante se déduit aisément des propriétés de l'exponentielle.

Proposition VII.4 L'application cosh est paire et l'application sinh est impaire. Elles sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$. L'application sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'application cosh est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$

On a la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x)^2 - \sinh^2(x) = 1$$

Démonstration. Voir TD. ■

R Les deux notations cosh et ch sont valides. La première est plus moderne. Idem pour les notations sinh et sh.

Définition VII.1 On définit arcosh = argch comme l'application réciproque de $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ et arsinh = argsh la bijection réciproque de $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

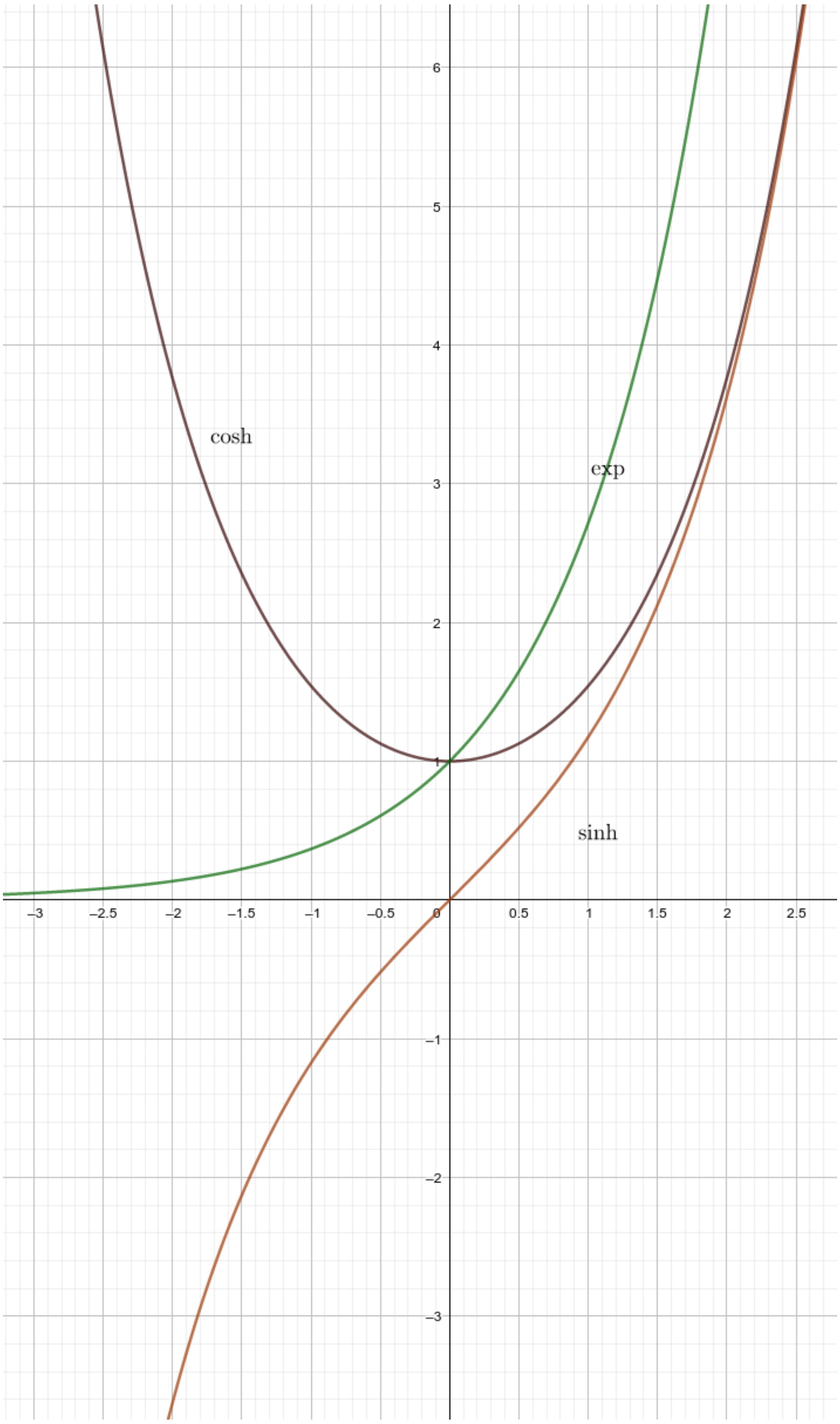


FIGURE 3.6 – Les graphes de sinh, cosh et exp

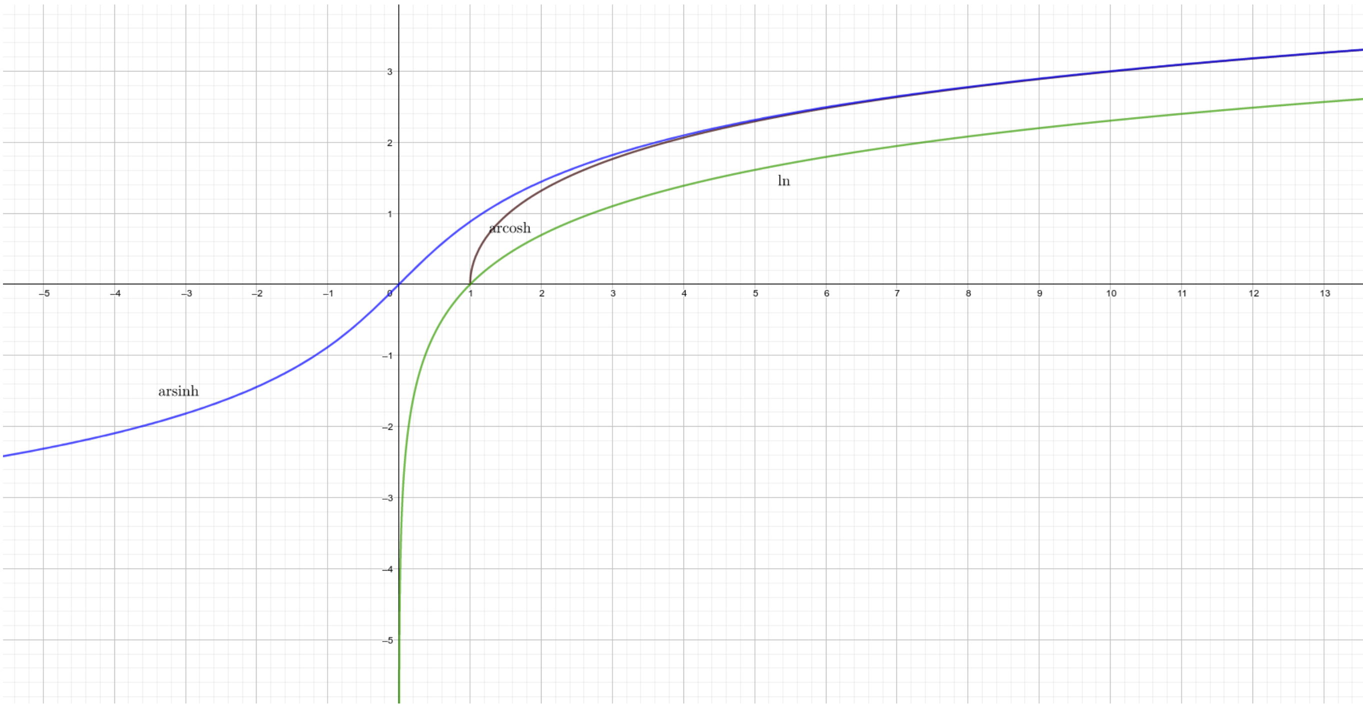


FIGURE 3.7 – Les graphes de arsinh, arcosh et ln

Proposition VII.5 On a :

$$\forall x \geqslant 1, \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

De plus :

$$\forall x > 1, \quad \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Démonstration. Voir TD. ∎

R Les deux notations arcosh (pour area cosinus hyperbolic) et argch (pour argument cosinus hyperbolique) sont valides. La première est plus moderne. Idem pour les notations sinh et argsh.

VIII Tableau des dérivées des fonctions classiques

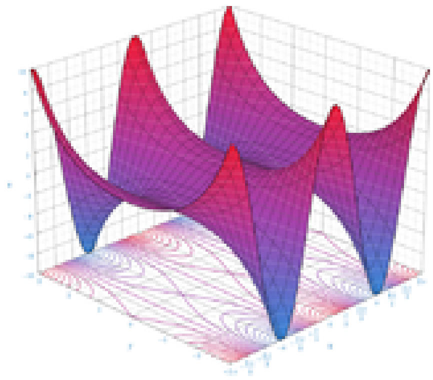
On termine avec un tableau des premières dérivées usuelles. L'ensemble dénoté $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des zéros de cosinus :

$$\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}=\{\pi/2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}=\cos^{-1}(\{0\})=\{x\in\mathbb{R}\mid \cos(x)=0\}.$$

		Domaine de dérivabilité	Dérivée
$x\mapsto 1$		$\mathbb{R}$	0
$x\mapsto x^n$	$n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto n\,x^{n-1}$
$x\mapsto \frac{1}{x^n}$	$n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x\mapsto -n/x^{n+1}$
$x\mapsto \sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\mapsto e^x$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto e^x$
$x\mapsto \ln(x)$		$\mathbb{R}_+^*$	$x\mapsto \frac{1}{x}$
$x\mapsto x^\alpha$	$\alpha\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x\mapsto \frac{1}{x^\alpha}$	$\alpha\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}^*$	$x\mapsto -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$
$x\mapsto \sin(x)$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto \cos(x)$
$x\mapsto \cos(x)$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto -\sin(x)$
$x\mapsto \tan(x)$		$\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$	$x\mapsto 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$x\mapsto \arcsin(x)$		$]-1,1[$	$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\mapsto \arccos(x)$		$]-1,1[$	$x\mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\mapsto \arctan(x)$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$
$x\mapsto \sinh(x)$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto \cosh(x)$
$x\mapsto \cosh(x)$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto \sinh(x)$
$x\mapsto \operatorname{arsinh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$		$\mathbb{R}$	$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$x\mapsto \operatorname{arcosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$		$]1,+\infty[$	$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

R Finalement dans ce chapitre, on aura admis :

1. Le théorème de dérivation des fonctions composées.
2. Le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
3. ln est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et de dérivée $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, pour tout $x>0$.
4. les applications sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, de période 2π et que $\cos'=-\sin$, $\sin'=\cos$.



4. Les fonctions à plusieurs variables

I Définition

Définition I.1 Une application à plusieurs variables est une application $f : E \to F$ tel que $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^p$.

Exemple I.1

— $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x+y+3$, $g(x,y) = x^2+y+7$, $xy+6$, $h(x,y) = e^x + \sin(y)$, $k(x,y) = e^{xy}$, etc.

— $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x) = (x, x^2)$, $g(x) = (x+1, e^x + x)$, etc.

— $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y,z) = (\sin(x) + yz, e^z + y^2 \ln(x) + y)$, etc.

R On peut composer $f : E \to F$ avec $g : F \to G$...

Exemple I.2 Composer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x + e^y$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x) = (x, x^2, x^3)$.

II Dérivées partielles

Définition II.1 Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $X = (x_1, \cdots, x_n) \in E$. La k-ième *tranche* de E en $X = (x_1, \cdots, x_n)$ est l'ensemble :

$$E_X^k = E \cap \{x_1\} \times \{x_{k-1}\} \times \mathbb{R} \times \{x_{k+1}\} \times \{x_n\}$$

Autrement dit, on fixe toutes les coordonnées sauf la k-ème.

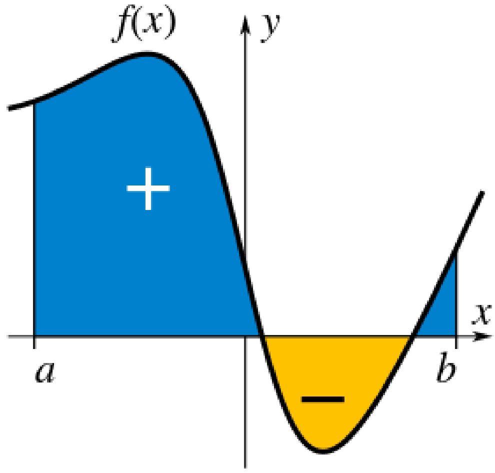
Exemple II.1 Une application à plusieurs variables $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *dérivable par rapport à la k-ième variable* au point $(x_1, \cdots, x_n) \in E$ lorsque l'application de la variable réelle $g_k : E_X^k \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_k. On note $\frac{\partial f}{\partial x_k} = g'_k$ l'application dérivée de g_k, on l'appelle *la dérivée partielle de f par rapport à la k-ème variable*.

Exemple II.2 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^2 + e^y$, $g(x,y) = x^3 \sin(y)$ et $h(x,y) = \cos(xy^2)$. On a :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y$ $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 \sin(y)$ $\frac{\partial g}{\partial y} = x^3 \cos(y)$

$\frac{\partial h}{\partial x} = -y^2 \sin(xy^2)$ $\frac{\partial h}{\partial y} = -2yx \sin(xy^2)$

R Autrement dit, dériver par rapport à x revient à considérer les autres variables comme des constantes et à dériver comme d'habitude...



5. Intégration

I C'est quoi ?

1 Les fonctions en escalier

Définition I.1 On dit qu'une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision de $[a, b]$, $s_0 = a < s_1 < \ldots < s_n = b$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, f est constante sur $]s_i, s_{i+1}[$. On dit dans ce cas que s est une *subdivision adaptée* à f.

R On observera qu'une telle subdivision n'est pas unique.

Exemple I.1 Toute application constante est en escalier.

Définition I.2 Si $s = (s_j)_{j=0,\ldots,n}$ est une subdivision de $[a, b]$ et $c \in [a, b]$, on note $s \cup \{c\}$ la subdivision s si $c = s_k$ pour un certain k. Sinon, on note k l'unique entier tel que $c \in]s_k, s_{k+1}[$ et $s \cup \{c\}$ désigne la subdivision s' définie par $s'_j = s_j$ pour $j \leqslant k$ $s'_{k+1} = c$ et $s'_j = s_{j+1}$ pour $j \geqslant k+1$. On définit alors par récurrence la réunion de deux subdivisions $s \cup s'$ et on a $s' \cup s = s \cup s'$.

Proposition I.1 La réunion d'une subdivision adaptée à une application en escalier f avec une subdivision quelconque est encore adaptée à f.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Il suffit de voir que l'ajout d'un point à une subdivision adaptée est encore une subdivision adaptée. ■

Proposition I.2 Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est en escalier.

2 Intégrale des fonctions étagées

Définition I.3 Soit une application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et s une subdivision adaptée à f. On pose :

$$I(f,s)=\sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1}-s_i)f\left(\frac{s_i+s_{i+1}}{2}\right).$$

Proposition I.3 Soit une application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier. Si s et s' sont deux subdivisions adaptées à f, on a $I(f,s)=I(f,s')$. Cette valeur commune est appelée *intégrale de f sur $[a,b]$* et est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\int_a^b f$.

Démonstration. On note $s''=s\cup s'$. C'est encore une subdivision adaptée. Montrons que, pour $c\in[a,b]$, $I(f,s)=I(f,s\cup\{c\})$. Il s'ensuivra alors par récurrence que $I(f,s)=I(f,s'')$ et, comme $s''=s'\cup s$, on aussi $I(f,s')=I(f,s'')$. ∎

Exemple I.2 Si f est constante égale à c, alors $\int_a^b f=c(b-a)$.

Proposition I.4 Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\int_a^b(f+\lambda g)=\int_a^b f+\lambda\int_a^b g$. Si $f\leqslant g$, on a $\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$.

Démonstration. Il suffit de considérer une subdivision adaptée simultanément à f et g, en prenant la réunion d'une subdivision adaptée à f et d'une subdivision adaptée à g. ∎

Proposition I.5 Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et $c\in[a,b]$. On a : $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Démonstration. Il suffit d'ajouter c à une subdivision adaptée. ∎

3 Définition de l'intégrale

On va admettre le Théorème suivant qui affirme que les applications continues sont approchables uniformément par les applications en escalier.

Théorème I.6 — admis. Soit f une application continue sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux applications en escalier sur $[a,b]$, notées E_1 et E_2, telle que

$$\forall x\in[a,b],\qquad E_1(x)\leqslant f(x)\leqslant E_1(x)+\varepsilon,$$

et

$$\forall x\in[a,b],\qquad E_2(x)-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant E_2(x).$$

Définition I.4 Soit f une application continue sur $[a,b]$. On pose

$$I_+(f) = \sup_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \leqslant f}} \int_a^b E, \qquad I_-(f) = \inf_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \geqslant f}} \int_a^b E.$$

Ces quantités sont finies en vertu du fait que f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. On a :

$$I_+(f) \leqslant (b-a) \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad I_-(f) \geqslant (b-a) \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Proposition I.7 Si f est en escalier, on a $I_+(f) = I_-(f) = \int_a^b f$.

Démonstration. Le supremum et l'infimum sont atteint en la fonction en escalier f. ■

Proposition I.8 Soient f, g continues sur $[a,b]$. Si $f \leqslant g$ alors $I_+(f) \leqslant I_+(g)$ et $I_-(f) \leqslant I_-(g)$.

Démonstration. On ne fait que I_+. L'ensemble des fonctions en escalier inférieure f est inclus dans l'ensemble des fonctions en escalier inférieure à g, par conséquent le supremum sur le second ensemble est plus grand que le supremum sur le premier. ■

Proposition I.9 Soit f une application continue sur $[a,b]$. On a $I_+(f) = I_-(f)$. Cette valeur commune est appelée *intégrale de f sur $[a,b]$* et est encore notée $\int_a^b f$.

Démonstration. On utilise seulement l'existence de E_1, on a :

$$\forall x \in [a,b], \quad E_1(x) \leqslant f(x) \leqslant E_1(x) + \varepsilon$$

En tire que :

$$\int_a^b E_1 = I_-(E_1) \leqslant I_-(f) \leqslant I_-(E_1 + \varepsilon) = \int_a^b E_1 + \varepsilon(b-a)$$

et

$$\int_a^b E_1 = I_+(E_1) \leqslant I_+(f) \leqslant I_+(E_1 + \varepsilon) = \int_a^b E_1 + \varepsilon(b-a)$$

Ou encore :

$$-\int_a^b E_1 - \varepsilon(b-a) \leqslant -I_-(f) \leqslant -\int_a^b E_1$$

D'où :

$$-\varepsilon(b-a) \leqslant I_+(f) - I_-(f) \leqslant \varepsilon(b-a)$$

Ainsi :

$$|I_+(f) - I_-(f)| \leqslant \varepsilon(b-a)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc $I_+(f) = I_-(f)$. ■

4 Propriétés

Proposition I.10 — ⋆. Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a :

$$\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda\int_a^b g.$$

Proposition I.11 — ⋆. Soit f, g continues sur $[a,b]$ telles que $f\leqslant g$. Alors on a

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Proposition I.12 — ⋆. Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $c\in[a,b]$. On a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition I.13 — ⋆. Soit f continue sur $[a,b]$. On a $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Démonstration. Cela provient du fait que $-|f|\leqslant f\leqslant |f|$. ■

Proposition I.14 — ⋆. Soit f une application continue et positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle, alors f est nulle.

Démonstration. Soit $c\in[a,b]$. Supposons que $f(c)>0$. Comme f est continue en c, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $x\in[a-\eta,a+\eta]\cap[a,b]$, $f(x)>0$. Or, on a :

$$\int_a^b f \geqslant \int_{\max(a,a-\eta)}^{\min(a+\eta,b)} f \geqslant \min_{x\in[\max(a,a-\eta),\min(a+\eta,b)]} f(x).$$

f est continue sur le segment $[\max(a,a-\eta),\min(a+\eta,b)]$; elle y atteint donc son minimum qui est donc strictement positif. ■

Définition I.5 Si $b\leqslant a$ et f continue sur $[b,a]$ on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$. On vérifie aisément que les propriétés de linéarité, de Chasles sont toujours valables.

II Primitives

1 C'est quoi ?

Définition II.1 Une *primitive* de f une application continue sur $[a,b]$ est une application dérivable telle que que $F'=f$.

Proposition II.1 — ⋆. Soit f une application continue sur $[a,b]$. Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Autrement dit F est une primitive de f.

Démonstration Admise. ∎

Corollaire II.1 Soit f une application dérivable sur $]a,b[$ et de dérivée continue. Alors, pour tout $x,y \in]a,b[$,

$$\int_x^y f' = f(y) - f(x).$$

2 Un exemple fondamental : le logarithme népérien

Un exemple très classique est la définition du logarithme népérien comme primitive s'annulant en 1 de l'application inverse :

$$\forall x > 0, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

On a montré que ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

III Calcul d'intégrales

1 Intégration par parties

Proposition III.1 Soient f et g deux applications $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Démonstration. On observe que $(fg)' = f'g + fg'$. On intègre ensuite sur $[a,b]$ et on applique le Corollaire II.1. ∎

Exercice 5.1 Trouver une primitive de $f :]0,+\infty[\ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$. ▪

Réponse : $x \mapsto x\ln(x) - x$.

2 Changement de variable

Proposition III.2 Soient $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$ et soit $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une application $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$ telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Alors, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\mathrm{d}y.$$

R Il faut lire cette proposition, de la façon suivante : on pose $x=\varphi(y)$, on change x en $\varphi(y)$ et dx en $\varphi'(y)$dy. Et, on change a en c et b en d. Attention, si φ est décroissante, cela entraîne que $d>c$.
En pratique, même si cela n'est pas nécessaire, φ est très souvent une **bijection** strictement croissante ou une **bijection** strictement décroissante. Il est important de prendre le temps de calculer les valeurs de a,b,c,d et de savoir si le changement de variable est croissant ou décroissant avant de se lancer dans le calcul.

Exercice 5.2 Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. On pourra utiliser le changement de variables $x=\cos u$. Réponse : $\frac{\pi}{2}$. Ne pas oublier que $\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$. ■

On pose $x=\cos(u)$, ce qui donne $dx=-\sin(u)du$, on note aussi que lorsque x varie de $a=-1$ à $b=1$, u varie de $c=\pi$ à $d=0$ (donc $\varphi=\cos$ décroît, on remarque au passage que le coefficient devant $-du$ est négatif). On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x & = & \int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos(u)^2}\times(-\sin(u))\mathrm{d}u \\
& = & \int_{\pi}^{0}\sqrt{\sin(u)^2}\times(-\sin(u))\mathrm{d}u \\
& = & \int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin(u)^2}\times\sin(u)\mathrm{d}u \\
& = & \int_{0}^{\pi}\sin(u)\times\sin(u)\mathrm{d}u \qquad \text{car } \sin(u)\geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi] \\
& = & \int_{0}^{\pi}\sin^2(u)\mathrm{d}u \\
& = & 1/2\int_{0}^{\pi}1-\cos(2u)\mathrm{d}u \\
& = & 1/2[u]_0^{\pi}-1/4[\sin(2u)]_0^{\pi} \\
& = & \pi/2
\end{array}$$

R Une version triviale du changement de variables est le cas où $\varphi(y)=ax+b$.

$$\int_0^5\sin(3x+1)\mathrm{d}x=\int_1^{16}\frac{1}{3}\sin(y)\mathrm{d}y=\dots$$

On a posé $x=1/3(y-1)$ et donc d$x=1/3$dy. Quand x varie de 0 à 5, y varie de 1 à 16.

3 Liste des primitives usuelles

La liste suivante est à apprendre (par coeur, si nécessaire). WARNING :

1. On donne UNE primitive, en particulier on a fait le choix de la primitive pour laquelle la constante est nulle.
2. Le domaine de définition des primitives données n'est pas toujours un intervalle. Les constantes que l'on ajoutent sont constantes sur chaque intervalle. Par exemple, l'application :

$$F:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R} \text{ donnée par } F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1 & \text{si} \quad x<-1\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+0 & \text{si} \quad -1<x<1\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

3. Ne pas oublier, que si on connait cette liste via un changement de variables du type $y = ax + b$ avec a, b bien choisis on connait beaucoup plus de primitives.
4. Ne pas oublier, non plus que la primitive de $u' f \circ u$ est $F \circ u$ où F est une primitive de f.

Fonction	**Une** Primitive	Domaine
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^{-1}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln \left\lvert \dfrac{x+1}{x-1} \right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \exp x$	$x \mapsto \exp x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$
sin	$-\cos$	$\mathbb{R}$
cos	sin	$\mathbb{R}$
sinh	cosh	$\mathbb{R}$
cosh	sinh	$\mathbb{R}$

4 Intégration des éléments simples

Un élément simple réel est une fraction rationnelle de la forme :

1. $x \mapsto \frac{\alpha}{x-a}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$ et un certain $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. $x \mapsto \frac{\alpha}{(x-a)^n}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$, un certain entier $n \geqslant 2$ et un certain $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. $x \mapsto \frac{\alpha X + \beta}{aX^2 + BX + c}$, pour des réels $\alpha, \beta, a, b, c, \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 - 4ac < 0$.
4. $x \mapsto \frac{\alpha X + \beta}{(aX^2 + BX + c)^n}$, pour des réels $\alpha, \beta, a, b, c, \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 - 4ac < 0$ et un entier $n \geqslant 2$.

Il faut retenir les points suivants :

1. On sait calculer une primitive de chacune des quatre fractions précédentes ! Ici, “on sait” veut dire, il existe des logiciels (Maple, TI-92,93, etc.) pour calculer

de telles primitives. Ce qui n'a rien d'évident, aucune primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ ne peut s'écrire avec une formule !

2. Pour les deux premières c'est facile, rappelons les formules.

Fonction	**Une** Primitive	Domaine
$x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$	$x \mapsto \ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$, $n \geqslant 2$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$

3. Pour la troisième, c'est plus difficile mais on va apprendre à le faire.
4. La quatrième est encore plus ardue, on ne traitera pas ce cas dans ce cours.

5. Pour la troisième, ce qu'il faut retenir c'est qu'on doit se ramener à intégrer une fraction du type $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et une fraction du type $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$. Il est bon de se rappeler des deux formules suivantes avant de se lancer dans les calculs :

Sous l'hypothèse que $a > 0$, on a :

Fonction	**Une** Primitive	Domaine
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x}{x^2+a}$, $n \geqslant 2$	$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+a)$	$\mathbb{R}$

On montre comment procéder sur un exemple, on ne donne pas de formules à apprendre par cœur. On va traiter l'exemple : $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$. Il faudra être capable de traiter des fractions similaires.

1. Première chose à faire : mettre le dénominateur sous forme canonique :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

2. Deuxième étape faire le changement de variable : $y = x + \frac{1}{2}$, qui donne $dx = dy$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\ &= \int \frac{y+\frac{1}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy\end{aligned}$$

3. Troisième étape, on sépare le numérateur en deux morceaux qu'on intègre

séparément.

$$\begin{aligned}\int \frac{y+\frac{1}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy &= \int \frac{y}{y^2+\frac{3}{4}}dy + \int \frac{\frac{1}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

4. Enfin, on remet x à sa place, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

5 Calcul des éléments simples : la pratique sans la théorie

La bonne nouvelle c'est que toute fraction rationnelle se décompose de façon unique comme une somme d'éléments simples.

Définition III.1 Le degré d'une fraction rationnelle $F = P/Q$ est l'entier relatif $\deg(P) - \deg(Q)$, on le note $\deg(F)$.

Voici un exemple de corollaire du théorème général qui va suivre. Les fractions rationnelles :

$$F = \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} \qquad \text{et} \qquad G = \frac{x^7}{(x^2+1)^2(x+2)}$$

se décomposent de la façon suivante : il existe un unique n-uplet de réels (a,b,c,d,e,f,g) tels que :

$$F = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)} + \frac{f}{x+1} + \frac{gx+h}{x^2+1}$$

il existe un unique n-plet de réels (a,b,c,d,e,f,g,h) tels que :

$$G = ax^2 + bx + c + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2} + \frac{fx+g}{x^2+1} + \frac{h}{x+2}$$

Théorème III.3 Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle.

1. On suppose que Q est factorisé sous la forme :

$$Q = a\prod_i (X-\alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_j (X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ tel que $b_j^2 - 4c_j < 0$, $m_i, \mu_j \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les α_i sont tous distincts et que les couples (b_j, c_j) sont aussi tous distincts.

2. On suppose que P ne s'annule pas sur les racines réelles et complexes de Q. Il existe un unique polynôme E à coefficients réels, et un unique n-uplet tels

que :

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\gamma_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\beta_{jl}x+\delta_{jl}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}$$

Si $\deg(F) < 0$ alors $E = 0$, si $\deg(F) \geqslant 0$ alors $\deg(E) = \deg(F)$.

La difficulté c'est de calculer (une fois que Q est factorisé) les $\gamma_{ik}, \beta_{jl}, \delta_{jl}$. On va énumérer quelques techniques pour réaliser cela.

Le coefficient de degré m_i ou μ_j

On traite le cas de la fraction rationnelle :

$$F = \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)} + \frac{f}{x+1} + \frac{hx+g}{x^2+1} \qquad (E)$$

Les coefficients les plus facile à calculer sont a, d, f, h, g.

1. Calcul de a, on multiplie les deux côtés de l'égalité (E) par x^3 et on évalue en 0, on obtient :
$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}(x=0) = a+0 \qquad \text{on en tire} \qquad a = 1$$
2. Calcul de b, on multiplie les deux côtés de l'égalité (E) par $(x-1)^2$ et on évalue en 1, on obtient :
$$\frac{1}{(x^3(x+1)(x^2+1)}(x=1) = d+0 \qquad \text{on en tire} \qquad d = \frac{1}{4}$$
3. Calcul de f, on multiplie les deux côtés de l'égalité (E) par $x+1$ et on évalue en -1, on obtient :
$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x^2+1)}(x=-1) = d+0 \qquad \text{on en tire} \qquad a = -\frac{1}{8}$$
4. Calcul de h, g, on multiplie les deux côtés de l'égalité (E) par x^2+1 et on évalue en i, on obtient :
$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}(x=\mathrm{i}) = h\mathrm{i}+g+0 \qquad \text{on en tire :}$$
$$h\mathrm{i}+g = \frac{1}{\mathrm{i}^3(\mathrm{i}-1)^2(\mathrm{i}+1)} = \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^4\left((1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\right)^2} = \frac{1-\mathrm{i}}{4}$$

Coefficient de E de plus haut degré

Si le degré de F est $n \geqslant 0$ alors le coefficient de degré n de E est la limite quand $x \to \pm\infty$ de $\frac{F}{x^n}$.

Exemple III.1 La fraction rationnelle $\frac{x^4}{x^2+1}$ se décompose en éléments simples de la façon suivante : $\frac{x^4}{x^2+1} = ax^2+bx+c+\frac{dx+e}{x^2+1}$. On a :

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Calcul des autres coefficients

On commence par calculer les éléments simples correspondant aux coefficients "dominants" comme indiqué ci-dessus, on les note H_i. Ensuite, on calcule $G = F - \sum H_i$, les éléments simples dominants de G sont les éléments simples en deuxième position de F... on recommence...

Utilisation de la parité ou de l'imparité

Les symétries paires/impaires d'une fraction rationnelle simplifient les calculs des éléments simples. Par exemple :

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} \quad G(x) = \frac{1}{(x-1)x^2(x+1)}$$

On commence par remarquer que F est impaire et que G est paire. Ensuite, on écrit la décomposition en éléments simples de F, il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \\ F(-x) & = & \frac{-a}{x} + \frac{-bx+c}{x^2+1} \\ -F(-x) & = & \frac{a}{x} + \frac{bx-c}{x^2+1} \end{array}$$

Ainsi, de $F(x) = -F(-x)$ et de l'unicité du triplet (a,b,c), on tire que :

$$a = a \quad b = b \quad c = -c$$

D'où $c = 0$. On n'a rien obtenu sur a et b. On fait G à présent :

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} \\ G(-x) & = & \frac{a}{x^2} + \frac{-b}{x} + \frac{c}{-x-1} + \frac{d}{-x+1} \\ G(-x) & = & \frac{a}{x^2} + \frac{-b}{x} + \frac{-c}{x+1} + \frac{-d}{x-1} \end{array}$$

Ainsi, de $G(x) = G(-x)$ et de l'unicité du triplet (a,b,c,d), on tire que :

$$a = a \quad b = -b \quad d = -c \quad c = -d$$

D'où $b = 0$ et $c = -d$.On n'a rien obtenu sur a et on a obtenu deux fois $c = -d$...

6 Calcul complet : deux exemples F et G

On va terminer les calculs des éléments simples de F et G. On commence par F, la théorie nous donne l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \qquad (\star)$$

L'imparité de F entraine que $c = 0$. Il reste à calculer a et b. Pour calculer a, on multiplie l'égalité $(\star)$ par x et on évalue en 0, on obtient :

$$1 = a$$

Pour calculer b, on multiplie l'égalité $(\star)$ par $x^2 + 1$ et on évalue en i.

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = b\mathrm{i}$$

D'où $b=-1$. Ainsi, on a montré que :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$$

On peut utiliser cette dernière égalité pour en déduire qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

La théorie nous donne l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$$G(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} \qquad (\bigstar)$$

La parité de G entraine que $b=0$ et $d=-c$. Il reste à calculer a et c. Pour calculer a, on multiplie l'égalité $(\bigstar)$ par x^2 et on évalue en 0, on obtient :

$$-1 = a$$

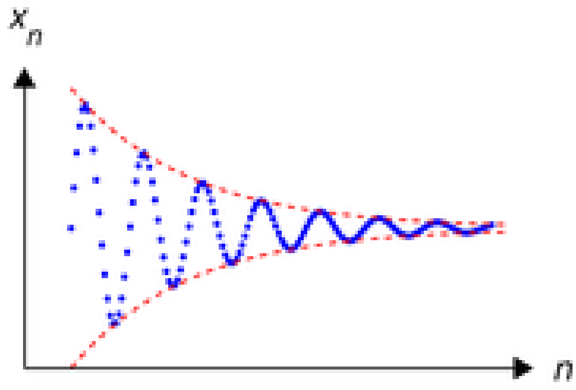
Pour calculer c, on multiplie l'égalité $(\bigstar)$ par $x-1$ et on évalue en 1, on obtient :

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} = c$$

Ainsi, on a montré que :

$$\frac{1}{(x-1)x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

On peut utiliser cette dernière égalité pour en déduire qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)x^2(x+1)}$ sur $]0,1[$ est $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$.



6. Suites de nombres réels

I Suites, exemples

1 Qu'est-ce qu'une suite ?

Définition I.1 On appelle *suite de nombres réels* toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si u est une suite, on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u_n$; c'est le *terme général* de la suite. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 6.1 Quelques exemples :

— Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u de terme général $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une *suite constante*.

— $u_n = n$ ou n^2 ou $\sqrt{n}$ ou e^n, plus généralement $f(n)$ où f est une fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

R Parfois les suites ne sont pas définies sur les premiers entiers. On notera $(u_n)_{n\geqslant 1}$ si la suite est définie à partir de l'entier 1, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ si elle est définie à partir de 2 et plus généralement $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ si elle est définie à partir de l'entier n_0.

— Les suites de terme général $1/n$ et $\ln(n)$ sont définies pour $n \geqslant 1$.

— On peut aussi définir une suite par récurrence, par exemple la suite de Fibonacci donnée par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

— Ou par itération d'une application, par exemple si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application, on peut définir par récurrence une suite u via $u_0 = u_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

■

2 Opérations sur les suites

Définition I.2 On définit :

1. la *somme* de deux suites u et v comme la suite $s = u + v$ de terme général $s_n = u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. le *produit* de deux suites u et v comme la suite $s = uv$ de terme général $p_n = u_n v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. le produit d'une suite u par un réel λ comme la suite $w = \lambda u$ de terme général $w_n = \lambda u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si la suite v n'est jamais nulle (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$) alors le *quotient* u/v est la suite de terme général u_n/v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le lecteur vérifiera que λu est aussi la suite obtenue en faisant le produit de la suite constante égale à λ et de la suite u.

3 Suites arithmétiques et géométriques

Définition I.3 — Suite arithmétique. Soit u une suite de réels. On dit que u est une *suite arithmétique* quand il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Ce nombre r (unique) est appelé la *raison* de la suite.

Définition I.4 — Suite géométrique. Soit u une suite de réels. On dit que u est une *suite géométrique* quand il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = r u_n$$

Ce nombre r est appelé la *raison* de la suite. Si u_0 est différent de 0, ce r est unique.

Proposition I.1 On a les assertions suivantes.

1. Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
2. Si v est une suite géométrique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 r^n$.

Démonstration. On procède par récurrence. L'initialisation est clairement vraie. Montrons l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 r^n$. On calcule :

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r \qquad v_{n+1} = r v_n = r r^n v_0 = r^{n+1} v_0$$

Ce qui montre l'hérédité. ■

4 Suites arithmético-géométriques

Définition I.5 — Suite arithmético-géométrique. Soit u une suite de réels. On dit que u est une *suite arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a u_n + b\,.$$

Proposition I.2 Soit u une suite arithmético-géométrique. On suppose que $a \neq 1$. On pose $\ell = \frac{b}{1-a}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n .$$

R Si $a = 1$ alors la suite est en faite arithmétique.

R On remarquera que ℓ est l'unique réel qui vérifie l'équation $a\ell + b = \ell$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite v de terme général $v_n = u_n - \ell$. La suite v est géométrique de raison g, car :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n$$

On obtient donc via la proposition sur les suites géométriques que :

$$v_n = a^n v_0$$

D'où le résultat, en revenant à la définition de v. ■

II Monotonie des suites, majoration, minoration

Définition II.1 Soit u une suite.

1. On dit que u est *croissante* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dit que u est *décroissante* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. On dit que u est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

On définit de même les notions de suite *strictement croissante*, *strictement décroissante* et *strictement monotone*.

Proposition II.1 Soit u une suite. Si la suite u est croissante alors :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant m \quad \Rightarrow u_n \leqslant u_m$$

Les énoncés similaires pour u décroissante, strictement monotone sont aussi vrais.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On va montrer par récurrence sur $m \geqslant n$, l'assertion $H_m : u_n \leqslant u_m$.

Initialisation : $H_n : u_n \leqslant u_n$ est vraie.

Soit $m \geqslant n$. On suppose H_m vraie. Montrons que H_{m+1} est vraie. On a :

$$u_n \underset{HR}{\leqslant} u_m \underset{Hyp: u \nearrow}{\leqslant} u_{m+1}$$

■

Exemple II.1 Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2 - n$ est croissante.

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = 2n \geqslant 0$ ■

Exemple II.2 Les suites arithmétiques de raisons positives (resp. négatives) sont croissantes (resp. décroissantes).

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = r$ ... ■

Proposition II.2 Soit u une suite. La suite u est (resp. strictement) croissante si et seulement si la suite $-u$ est (resp. strictement) décroissante.

Démonstration. Exo. ■

Proposition II.3 Soit u une suite strictement positive (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$) alors :
— u est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
— u est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
— u est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
— u est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Démonstration. On ne fait que la première équivalence. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors comme u est strictement positive, on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Inversement, si u est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Comme u est strictement positive, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. ■

Exemple II.3 Montrer qu'une suite géométrique non nulle de raison strictement plus grande que 1 est strictement monotone.

Démonstration. Soit u une suite géométrique de raison $r > 1$. Si $u_0 > 0$ alors u est strictement croissante.
En effet, dans ce cas u est strictement positive et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
Si $u_0 < 0$ alors u est strictement décroissante.
En effet, dans ce cas u est strictement négative, donc la suite $-u$ est strictement positive et $\frac{-u_{n+1}}{-u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
Donc $-u$ est strictement croissante donc u est strictement décroissante. ■

Définition II.2 Soit u une suite.
1. On dit que u est *majorée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
2. On dit que u est *minorée* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
3. On dit que u est *bornée* lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple II.4 Quelques exemples :
— La suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
— La suite de terme général $u_n = e^n$ est minorée par 0 et non-majorée.
— La suite de terme général $u_n = sin(n)$ est minorée par -1 et majorée par 1.
— Toute suite décroissante u est majorée par u_0.
— Toute suite croissante u est minorée par u_0.

En pratique, pour montrer qu'une suite est bornée, on utilise souvent la proposition suivante.

Proposition II.4 La suite u est bornée si et seulement si la suite $|u|$ est majorée.

Démonstration. Si la suite u est bornée alors ils existent $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A \leqslant u_n \leqslant B$$

Quitte à changer B en 1, on peut supposer que $B > 0$. Quitte à changer A en -1, on peut supposer que $A < 0$. On pose $M = max(-A, B)$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -M \leqslant A \leqslant u_n \leqslant B \leqslant M$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant M$$

La suite $|u|$ est donc majorée.

Inversement, si la suite $|u|$ est majorée alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant M$$

autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -M \leqslant u_n \leqslant M$$

Ainsi u est majorée et minorée donc bornée. ∎

III Suite extraite

Définition III.1 — Suite extraite. Soit u une suite and $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que $u \circ \varphi$ est une *suite extraite* de u et on dit que φ est une *extractrice*.

Lemme III.1 Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration. Par récurrence sur n. L'initialisation est vraie. Il faut montrer l'hérédité. Supposons que $\varphi(n) \geqslant n$. La stricte croissance de φ montre que l'on a :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$$

D'où $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. ∎

▪ **Exemple 6.2** On prend $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n+1$ ce sont deux extractrices. Si on prend u la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ alors la suite extraite de u par φ_1 est la suite constante égale à 1 et celle extraite via φ_2 est la suite constante égale à -1. ▪

IV Limite d'une suite

1 Généralités

Définition IV.1 Soit u une suite. On dit qu'**un** nombre $\ell \in \mathbb{R}$ est *limite de la suite u* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Qui s'écrit de façon équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$

Proposition IV.1 Si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ sont limites de u, alors $\ell_1 = \ell_2$. Cette valeur commune est, par définition, *la limite de u* et est notée $\lim u$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ou $u_n \to \ell$. Enfin, on dit que u est une suite *convergente*.

Exemple IV.1 Les suites constantes sont convergentes.

Exemple IV.2 On considère la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. Montrer que u tend vers 0 en exhibant un $N \in \mathbb{N}$ explicite (et dépendant de ε).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on va chercher $N = N_\varepsilon$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \varepsilon$$

Pour cela, on commence par majorée $|u_n|$ par une expression algébrique plus simple, comme suit :
$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \varepsilon^{-1}$, donc on pose $N = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \geqslant N = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

■

Démo de l'unicité de la limite. Par l'absurde, supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Quitte à échanger ℓ_1 et ℓ_2, on peut supposer que $\ell_1 < \ell_2$. On prend $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$. Ils existent deux entiers N_1 et N_2 tels que :

$$\forall n \geqslant N_1, \qquad |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N_2, \qquad |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient :

$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\forall n \geqslant N, \qquad \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$

Mais :

$$\ell_1 + \varepsilon < \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = \frac{\ell_2 + \ell_1}{2} = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < \ell_2 - \varepsilon$$

Absurde. Donc $\ell_1 = \ell_2$. ■

Exemple IV.3 Montrer qu'une suite géométrique de raison r telle que $|r| < 1$ tend vers 0. On pourra utiliser le logarithme.

R Dans la définition de la convergence, on peut changer :$\forall \varepsilon > 0$, en $\forall\, 0 < \varepsilon < 1$, ou en $\forall\, 0 < \varepsilon < 10^{-10}$, ou encore en $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 > 0$.

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < 1$. L'inégalité $|u_n| \leqslant |u_0||r|^n \leqslant \varepsilon$ est vérifiée dès que $\ln|u_0| + n\ln|r| \leqslant \ln(\varepsilon)$, dès que $-\ln|u_0| - n\ln|r| \geqslant -\ln(\varepsilon)$ dès que $n \geqslant \frac{-\ln(\varepsilon)+\ln|u_0|}{-\ln|r|}$. Donc on pose $N = \lfloor \frac{-\ln(\varepsilon)+\ln|u_0|}{-\ln|r|} \rfloor + 1$ ■

Proposition IV.2 Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit ε. La suite u tend vers ℓ et il existe un n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On pose : $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{n_0}|, |l| + \varepsilon)$. Par définition, on a, pour tout n, $|u_n| \leqslant M$. ■

Proposition IV.3 Tout suite qui converge vers une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Démonstration. On applique la définition de la convergence vers $\ell > 0$ avec $\varepsilon = \ell/2$. On obtient qu'il existe un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$u_n \geqslant \ell - \varepsilon \geqslant \ell/2 > 0$$

■

Proposition IV.4 — Limite d'une suite extraite. Si u est une suite convergente vers ℓ, alors toute suite extraite de u est convergente vers ℓ. Réciproquement, si toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ, alors u converge vers ℓ.

Démonstration. Soit u une suite convergente vers ℓ et φ une extractrice. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Mais, on a vu que pour tout $\varphi(n) \geqslant n$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$. On admet la réciproque. ■

Définition IV.2 Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Exemple IV.4 Montrer que les suites de terme général $u_n = (-1)^n$, $v_n = n$ sont divergentes.

Proposition IV.5 Si u est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ, alors u converge vers ℓ.

Démonstration. Par hypothèse, soit $\varepsilon > 0$, ils existent N_{pair} et N_{impair} tel que :

$$\forall n \geqslant N_{pair}, \quad |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_{impair}, \quad |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N_0 = max(2N_{pair}, 2N_{impair}+1)$, on obtient que :

$$\forall n \geqslant N_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

■

Définition IV.3 Soit u une suite. On dit que u *tend vers* $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A)\,.$$

On vérifie facilement qu'une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente et non bornée. On dit dans ce cas que u *diverge vers* $+\infty$. On définit de même la *divergence vers* $-\infty$.

Exemple IV.5 On considère la suite de terme général $u_n = n^2 - n$. Montrer que u diverge vers $+\infty$.

Démonstration. On commence par montrer que $u_n \geqslant n-1$, pour tout n, puisque :

$$n^2 - n - (n-1) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geqslant 0$$

On montre à présent que u tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$u_n \geqslant n - 1 \geqslant A \quad \text{dès que} \quad n \geqslant A+1$$

On pose donc $N = \lceil A+1 \rceil$ et on obtient le résultat. ■

Exemple IV.6 Montrer qu'une suite géométrique non nulle de raison $r > 1$ diverge soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.

Démonstration. On va montrer que si $u_0 > 0$ alors u tend vers $+\infty$. On laisse en exercice de montrer que si $u_0 < 0$ alors u tend vers $-\infty$. Soit $A > 0$. $u_0 r^n \geqslant A \Leftrightarrow \ln u_0 + n\ln(r) \geqslant \ln(A) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(A)-\ln(u_0)}{\ln r} =: x_0$. La dernière équivalence utilise que $\ln(r) > 0$ car $r > 1$. On pose $N = \lceil x_0 \rceil$. On obtient le résultat. ■

2 Propriétés de la limite

Proposition IV.6 Les assertions suivantes sont vraies.

1. Si u et v convergent respectivement vers ℓ_u et ℓ_v, alors u+v converge vers $\ell_u + \ell_v$, uv converge vers $\ell_u \ell_v$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu converge vers $\lambda \ell_u$.
2. Si u est bornée et si v diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $u+v$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
3. Si u et v divergent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), $u+v$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et uv diverge vers $+\infty$.
4. Si u converge vers $\ell_u > 0$ et si v diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), uv diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
5. Si u est une suite d'éléments non nuls et convergente de limite $\ell_u \neq 0$, alors la suite $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{\ell_u}$.

6. Si u est une suite d'éléments non nuls divergeant vers $\pm\infty$, la suite $\frac{1}{u}$ converge vers 0.

Démonstration. On montre la somme, le produit et l'inverse, on laisse les autres en exercice. Soient u et v convergeant respectivement vers ℓ_u et ℓ_v. Soit $\varepsilon > 0$, ils existent N_u et N_v tels que :

$$\forall n \geqslant N_u, \quad |u_n - \ell_u| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N_v, \quad |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon/2$$

On pose $N = \max(N_u, N_v)$, on a, pour$n \geqslant N$:

$$|u_n + v_n - (\ell_u + \ell_v)| = |u_n - \ell_u + v_n - \ell_v| \leqslant |u_n - \ell_u| + |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

La première inégalité est conséquence de l'inégalité triangulaire.
Pour le produit, il faut être un peu plus agile. Les suites u et v sont convergentes donc bornées. On note M_u et M_v des majorants de $|u|$ et $|v|$. Soit $\varepsilon > 0$, ils existent N'_u et N'_v tels que :

$$\forall n \geqslant N'_u, \quad |u_n - \ell_u| \leqslant \varepsilon/2\ell_v \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N'_v, \quad |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon/2M_u$$

On pose $N' = \max(N'_u, N'_v)$, on a :

$$|u_n v_n - \ell_u \ell_v| = |u_n v_n - u_n \ell_v + u_n \ell_v - \ell_u \ell_v| \leqslant |u_n||v_n - \ell_v| + |\ell_v||u_n - \ell_u| \geqslant M_u \varepsilon/2M_u + \ell_v \varepsilon/2\ell_v = \varepsilon, \quad \text{pour } n \geqslant N'$$

Pour l'inverse, on suppose que $\ell > 0$. Le cas $\ell < 0$ est similaire. Soit $\varepsilon > 0$. Ils existent N''_0 et N''_1 tels que :

$$\forall n \geqslant N''_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \ell/2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N''_1, \quad |u_n - \ell| \leqslant \ell^2\varepsilon/2$$

On pose $N'' = \max(N''_0, N''_1)$, on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - u_n}{u_n \ell}\right| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\ell\ell/2} = \frac{2|u_n - \ell|}{\ell^2} \leqslant \varepsilon, \quad \text{pour } n \geqslant N''$$

■

Proposition IV.7 Soient deux suites u, v telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n.$$

Si u, v convergent vers ℓ_u, ℓ_v respectivement, on a :

$$\ell_u \leqslant \ell_v.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons $l_u > l_v$. On applique la définition de la convergence de u et v avec $\varepsilon = \frac{l_u - l_v}{3}$. On commence par remarquer que ce choix de ε permet d'avoir l'inégalité :

$$\ell_v + \varepsilon < \ell_u - \varepsilon \quad \text{puisque} \quad 2\varepsilon < \ell_u - \ell_v$$

Il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell_u| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \ell_u - \varepsilon \quad \text{et} \quad v_n \leqslant \ell_v + \varepsilon$$

Par conséquent, on obtient :

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \leqslant \ell_v + \varepsilon \leqslant \ell_u - \varepsilon \leqslant u_n$$

Absurde.

■

Exemple IV.7 Donner un exemple de suite u telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que u converge vers 0. Conclure que **les inégalités strictes ne sont pas préservées par passage à la limite** !

Proposition IV.8 — Théorème des gendarmes. Soient u et v deux suites convergentes et de même limite ℓ. Si w est une autre suite qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant w_n \leqslant v_n,$$

alors w converge vers ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\forall n \geqslant N, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

■

Proposition IV.9 — Théorème du bulldozer. Soit u divergente vers $+\infty$. Si w est une autre suite qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant w_n,$$

alors w diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $M > 0$. Il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant M$$

Donc on a :

$$\forall n \geqslant N, \quad w_n \geqslant u_n \geqslant M$$

■

3 Les théorèmes de comparaison

Le lemme suivant sera bien utile :

Lemme IV.10 Soit u une suite strictement positive. s'ils existent un entier n_0 et un réel $\rho < 1$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1}/u_n < \rho$ alors $u \to 0$. En particulier, si $u_{n+1}/u_n \to \ell < 1$ alors $u_n \to 0$.

Démonstration. Une récurrence montre que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad u_{n_0+k} \leqslant \rho u_{n_0+k-1} \leqslant \rho^2 u_{n_0+k-2} \leqslant \rho^k u_{n_0}$$

On a donc :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \rho^n \frac{u_{n_0}}{\rho^{n_0}}$$

Le théorème des gendarmes conclut. ■

Exemple IV.8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ est convergente vers 0.

Démonstration. L'énoncé est équivalent à l'énoncé $\frac{|x|^n}{n!}$ est convergente vers 0. On peut donc supposer $x > 0$, $u_{n+1}/u_n = \frac{x}{n+1} \to 0$. ■

Exemple IV.9 Montrer que la suite de terme général $u_n = n2^{-n}$ est convergente vers 0.

Démonstration. $u_{n+1}/u_n = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$. ■

Exemple IV.10 Soit $k \geqslant 1$ et $r > 1$. Montrer que la suite de terme général $u_n = n^k r^{-n}$ est convergente vers 0.

Démonstration. $u_{n+1}/u_n = (1 + \frac{1}{n})^k r^{-1} \to r^{-1} < 1$. ■

Exemple IV.11 Montrer que la suite de terme général $u_n = n!/n^n$ est convergente vers 0.

R Il est utile de connaitre la limite suivante :

$$(1 + 1/n)^n \to e$$

En effet :

$$(1 + 1/n)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$$

Mais :

$$n \ln(1 + 1/n) = \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \to \ln'(1) = 1$$

On obtient donc que :

$$(1 + 1/n)^n \to e$$

Démonstration. $u_{n+1}/u_n = (1 + \frac{1}{n})^{-n} \to e^{-1} < 1$. ■

Exemple IV.12 Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente vers 0.

Démonstration. La technique précédente ne marche pas car $u_{n+1}/u_n \to 1\ldots$ Mais on peut se ramener à du déjà vu :

$$\begin{aligned} \ln(n) &\leqslant \lfloor \ln(n) \rfloor + 1 \\ n = e^{\ln(n)} &\geqslant e^{\lfloor \ln(n) \rfloor} \\ \text{Donc } \frac{\ln(n)}{n} &\leqslant \frac{\lfloor \ln(n) \rfloor + 1}{e^{\lfloor \ln(n) \rfloor}} = \underbrace{\frac{\lfloor \ln(n) \rfloor + 1}{\lfloor \ln(n) \rfloor}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\lfloor \ln(n) \rfloor}{e^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}}_{= v_{\lfloor \ln(n) \rfloor}} \end{aligned}$$

où $v_n = n/e^n \to 0$. ■

Définition IV.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. On dit de façon équivalente que :
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *prépondérante* devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *un petit o* de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

lorsque :

$$\frac{u_n}{v_n} \to 0$$

On note $u_n = o(v_n)$.

Proposition IV.11 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. On suppose que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.

$$\text{Si} \quad u_n = o(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = o(w_n) \quad \text{alors} \quad u_n = o(w_n)$$

Démonstration. On a, pour n suffisamment grand :

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{w_n} \to 0$$

puisque les deux suites de termes général $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{v_n}{w_n}$ tendent vers 0. ■

Proposition IV.12 Pour tout $\alpha, A > 1$, pour tout $\beta, B, \gamma > 0$, avec $\beta < B$ et $\alpha < A$ on a :
1. $\ln(n)^\beta = o(\ln(n)^B)$.
2. $n^\beta = o(n^B)$.
3. $\alpha^n = o(A^n)$.

et
1. $\ln(n)^\beta = o(n^\gamma)$
2. $n^\gamma = o(\alpha^n)$
3. $\alpha^n = o(n!)$

4. $n! = o(n^n)$

Démonstration. La première série de négligeabilité est évidente. Pour la seconde série. On pose $u_n = \frac{n^\gamma}{\alpha^n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\gamma}{\alpha^{n+1}}\frac{\alpha^n}{n^\gamma} = (1+\frac{1}{n})^\gamma \frac{1}{\alpha} \to \alpha^{-1} < 1$$

Le lemme conclut que $u_n \to 0$.

Les affirmations $\alpha^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$ ont été démontrées dans les exemples précédents. On laisse l'affirmation $\ln(n)^\beta = o(n^\gamma)$, elle se démontre de façon analogue à l'affirmation $\ln(n) = o(n)$ démontrée dans les exemples. ∎

4 Autour du théorème de convergence monotone

On peut parfois montrer a priori qu'une suite converge sans connaître la limite.

Proposition IV.13 — Convergence monotone. Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

On rappelle le Théorème V.1.

Théorème IV.14 — ⋆. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure et c'est l'unique nombre réel S vérifiant,
   (a) S est un majorant de A,
   (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \geqslant S - \varepsilon$.
2. Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure et c'est l'unique nombre réel I vérifiant,
   (a) I est un minorant de A,
   (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \leqslant I + \varepsilon$.

Démonstration. Soit u une suite croissante et majorée. Notons

$$A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\},$$

l'ensemble des valeurs prises par la suite. C'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle possède donc une borne supérieure S. En particulier, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant S,$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, $a \geqslant S - \varepsilon$. Cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant S - \varepsilon$. Par croissance de la suite u, on en déduit que, pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n \geqslant u_N \geqslant S - \varepsilon,$$

et donc

$$-\varepsilon \leqslant u_n - S \leqslant 0 \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que u converge vers S. ∎

De cette proposition, on déduit le fameux théorème des suites adjacentes.

Proposition IV.15 — **Suites adjacentes.** Soient u et v deux suites telles que

1. u est croissante et v est décroissante,
2. $v-u$ converge vers 0.

Alors, u et v convergent vers une limite commune.

Démonstration. Commençons par montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}>v_{n_0}$. Mais alors, par monotonie, on en déduirait, pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant u_{n_0}>v_{n_0}\geqslant v_n$ et par conséquent : $u_n-v_n\geqslant u_{n_0}-v_{n_0}>0$. Comme $u-v$ converge vers 0, on en déduit que $0\geqslant u_{n_0}-v_{n_0}>0$, ce qui est absurde.

De cette propriété et de la monotonie, on déduit que u est majorée (par v_0) et que v est minorée (par u_0). Ainsi, u et v sont convergentes de limites respectives ℓ_u et ℓ_v. Comme $u-v$ tend vers 0, on en tire $\ell_u=\ell_v$. ■

Exemple IV.13 On considère $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ et $v_n=u_n-\frac{1}{n}$.

1. Clairement $u-v$ tend vers zéro...
   On va utiliser l'inégalité : $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$.
2. $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)\leqslant\frac{1}{n+1}+\ln(1-\frac{1}{n+1})\leqslant 0$. Donc u est décroissante.
3. $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\geqslant 0$. Donc v est croissante.

Conclusion u et v converge vers une même limite. Cette limite s'appelle la *constante d'Euler*, on la note généralement γ. On a :

$$\gamma=0{,}5772156649.$$

On ne sait pas si $\gamma\in\mathbb{Q}$ ou $\gamma\notin\mathbb{Q}$ ...

Exemple IV.14 On introduit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}$$

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{(n+1)!}$.

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}\right)$$

— La suite $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

— Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite commune, que l'on notera e et qui est pour d'autre raison $e=\exp(1)$.
On va montrer par l'absurde que $e\notin\mathbb{Q}$. On suppose qu'ils existent $p,q\in\mathbb{N}^*$ tels que $e=\frac{p}{q}$.

— La strict-monotonie de u_n et v_n montre que pour tout n, on a :

$$u_n<e<v_n$$

En particulier :

$$q!u_q<q!e<q!v_q$$

Mais les réels $q!u_q$ et $q!e$ sont des entiers et $|q!u_q-q!v_q|=\frac{1}{q}<1$. Par suite, $q!e=q!u_q$ et donc $e=u_q$ ce qui est absurde.

Corollaire IV.15 — ⋆ **Théorème des segments emboîtés.** Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments fermés de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers 0 et décroissante au sens où $I_{n+1}\subset I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ est un ensemble qui contient un point et un seul.

Démonstration. On note $I_n=[u_n,v_n]$, puisque la suite de segments est emboitée. La suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante. Puisque la longueur des segments I_n tend vers zéro, $v-u$ tend vers zéro. Ainsi u et v sont des suites adjacentes. On note ℓ leur limite commune. On va montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n=\{\ell\}$.

Tout d'abord, on a pour tout n, $\ell\in[u_n,v_n]$, puisque pour tout n, on a $u_n\leqslant\ell\leqslant v_n$ puisque u est croissante et v est décroissante. Donc $\ell\in\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n$.

Ensuite, Soit $x>\ell$, il existe un n_0 tel que $\ell<v_{n_0}<x$, mais alors $x\notin\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n$. De même si $x<\ell$, on conclut que $x\notin\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ donc $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n=\{\ell\}$. ■

Théorème IV.16 — ⋆ **Théorème de Bolzano-Weierstrass.** Soit u une suite bornée de réels. Alors u possède une suite extraite convergente.

Démonstration. On note $I=[-M,M]=J\cup K$, une des deux moitiés de I contient une infinité de termes de u. On la note I_1, on coupe I_1 en deux, une des deux moitiés de I_1 contient une infinité de termes de u, on note I_2 cette moitié, etc... on obtient une suite I_n de segments emboités et la longueur de I_n est $2M/2^n$, donc tend vers zéro.

Le théorème des segments emboités nous montre que $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ est un ensemble qui contient un point et un seul, on note ℓ ce réel.

On va à présent construire une suite extraite de u qui converge vers l. On note $\varphi(0)=0$, $\varphi(n)$ est le plus petit entier strictement supérieur à 0 tel que $u_{\varphi(n)}\in I_n$. Par construction φ est une extractrice et $|u_{\varphi(n)}-\ell|\leqslant 2M/2^n$. D'où la conclusion. ■

5 Retour sur la notion de borne supérieure

Proposition IV.17 Soient A une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ et S un réel. On a l'équivalence entre :
- $S=\sup(A)$
- S est un majorant de A et il existe une suite u_n tel que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in A$ et $u_n\to S$.

Démonstration. Supposons que $S=\sup(A)$. Alors S est un majorant de A. Il nous faut construire une suite u d'éléments de A tels que $u\to S$. Comme S est la borne supérieure de A, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \exists u_n\in A,\quad S-\frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant S$$

Ainsi, on a défini une suite u d'éléments de A qui vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n-S|\leqslant 1/n$$

En particulier, $u \to S$.

Inversement, supposons que S est un majorant de A et qu'il existe une suite u tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$ et $u \to S$. Montrons que $S = \sup(A)$. On sait déjà que S est un majorant de A. Il faut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad S - \varepsilon \leqslant a$$

Pour cela, on va utiliser la suite u. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, de la convergence $u \to S$, il existe un N tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - S| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit,

$$\forall n \geqslant N, \quad S - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant S + \varepsilon$$

On prend $a = u_n$, on obtient le résultat souhaité. ∎

6 Retour sur la densité

Proposition IV.18 Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On a l'équivalence :
- La partie E est dense dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite u tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E$ et $u \to x$.

Démonstration. Supposons que E est dense dans $\mathbb{R}$. *Cela signifie que pour tout intervalle ouvert* $]a, b[$ *on a* $E \cap]a, b[\neq \varnothing$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, l'intersection $]x - 1/n, x + 1/n[\cap E$ est non vide. Il existe donc un réel $u_n \in E$ tel que $|u_n - x| < 1/n$. On a ainsi défini une suite u d'éléments de E tels que $u \to x$.

Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite u tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E$ et $u \to x$. Montrons que E est dense. Soient $a < b$ deux réels. On doit montrer que $]a, b[\cap E$ est non vide. Soit $x \in]a, b[$. Par hypothèse, il existe une suite u d'éléments de E telle que $u \to x$. On note $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$. Par définition de la convergence, il existe un N tel que pour $n \geqslant N$, on a $a \leqslant x - \varepsilon < u_n < x + \varepsilon \leqslant b$. Par suite, $u_n \in]a, b[\cap E$. D'où la conclusion. ∎

V Récurrences linéaires d'ordre deux à coefficients constants

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On veut trouver une formule explicite pour toutes les suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0. \tag{V.1}$$

1 Deux remarques

Proposition V.1 Si les suites u et v vérifient (V.1) alors pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ la suite $au + bv$ vérifie (V.1).

Démonstration. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+2} + \alpha v_{n+1} + \beta v_n = 0$$

En multipliant la première égalité par a et la seconde par b, on obtient que la suite $au + bv$ vérifie (V.1). ∎

Proposition V.2 Soit $r \neq 0$. La suite géométrique r^n vérifie (V.1) si et seulement si $P(r) = 0$ où P est le polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$.

Démonstration. La suite géométrique r^n vérifie (V.1) si et seulement si :

$$0 = r^{n+2} + \alpha r^{n+1} + \beta r^n = r^n(r^2 + \alpha r + \beta) = r^n P(r)$$

∎

2 L'énoncé général 1 : cas racines distincts

Proposition V.3 Si les racines de P sont distinctes, on note $r_1 \in \mathbb{C}$ et $r_2 \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$. Pour toute suite u vérifiant (V.1), on peut trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a r_1^n + b r_2^n.$$

Démonstration. On rappelle que $r_1 + r_2 = -\alpha$ et $r_1 r_2 = \beta$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - r_1 u_n.$$

Montrons que $(v_n)_n$ est géométrique de raison r_2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+2} - r_1 u_{n+1} = -\alpha u_{n+1} - \beta u_n - r_1 u_{n+1} \\ &= (r_1 + r_2) u_{n+1} - r_1 r_2 u_n - r_1 u_{n+1} \\ &= r_2 u_{n+1} - r_1 r_2 u_n \\ &= r_2 v_n \end{aligned}$$

De la sorte, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - r_1 u_n = (u_1 - r_1 u_0) r_2^n.$$

De la même façon, on trouve

$$u_{n+1} - r_2 u_n = (u_1 - r_2 u_0) r_1^n.$$

D'où :

$$(r_1 - r_2) u_n = (r_1 u_0 - u_1) r_2^n + (u_1 - r_2 u_0) r_1^n$$

∎

Exemple V.1 Donner une expression explicite du terme général des suites qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,, \tag{V.2}$$

et $u_0 = 0, \quad u_1 = 1$ (Suite de Fibonacci).

Démonstration. On cherche les racines du polynôme : $X^2 - X - 1$. On utilise la méthode usuelle :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-1) = 5 \qquad r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \qquad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \overline{\phi}$$

Le nombre ϕ s'appelle le nombre d'or, on le retrouve partout : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or`.

Les racines de P sont distinctes puisque $\Delta \neq 0$, par conséquent, la théorie nous montre qu'ils existent a, b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\phi^n + b\overline{\phi}^n$$

Pour calculer a, b, on utilise surtout pas les formules données par la preuve précédente, on utilise les valeurs initiales de la suite. En particulier, a et b vérifient les équations :

$$0 = u_0 = a\phi^0 + b\overline{\phi}^0 = a + b \qquad \text{et} \qquad 1 = u_1 = a\phi + b\overline{\phi}$$

Ainsi :

$$b = -a \qquad \text{et} \qquad 1 = a(\phi - \overline{\phi})$$

Ainsi, on a obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\phi - \overline{\phi}}$$

■

3 L'énoncé général 2 : cas racine double

Proposition V.4 Si les racines de P sont égales $r_1 = r_2 = r \neq 0$, pour toute suite u vérifiant (V.1), on peut trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (a + bn)r^n \,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = r^{-n} u_n \,.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0 \,,$$

ou encore

$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n \,.$$

On en déduira que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique. Ce qui conclura.

$$\begin{aligned}v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n =& r^{-n-2}u_{n+2}-2r^{-n-1}u_{n+1}+r^{-n}u_n\\ =& r^{-n-2}(u_{n+2}-2ru_{n+1}+r^2u_n)\\ =& r^{-n-2}(u_{n+2}+\alpha u_{n+1}+\beta u_n)\\ =& 0\end{aligned}$$

Car $\alpha=-2r$ et $\beta=r^2$, puisque $X^2+\alpha X+\beta=(X-r)^2$. ■

Exemple V.2 Donner une expression explicite du terme général des suites qui vérifient

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=0, \tag{V.3}$$

et $u_0=0$ et $u_1=2$.

Démonstration. On commence par regarder le polynôme : $P(X)=X^2-4X+4$. On a :

$$\Delta=16-4\cdot4=0 \qquad r=\frac{4+0}{2}=2$$

Ainsi P possède une racine double : 2. La théorie nous affirme qu'il existe a,b tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(an+b)2^n$$

Pour trouver a,b on regarde les valeurs initiales de $(u_n)_n$. On a deux équations :

$$0=u_0=(a0+b)2^0=b \qquad \text{et} \qquad 2=u_1=a2^1$$

Ainsi, on obtient que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n n$$

■

VI Suites définies par itération d'une application

Définition VI.1 On considère une application $f:I\to I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$[a]. La suite u définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n), \qquad u_0\in I.$$

s'appelle la suite définie par *itération de f en partant de u_0*.

a. Le fait que f parte de I et arrive dans I est crucial dans cette définition

De manière générale, l'étude des suites définies pour itération d'une fonction prise au hasard est très difficile voir impossible. Pour s'habituer à la gymnastique, on pourra regarder l'itération de la fonction f donnée par $f(x)=3x(1-x)$ avec $u_0=1/4$.

Vous pouvez utiliser la ressource GeoGebra de Christian Mercat disponible à l'adresse :
🌍 `https://www.geogebra.org/m/K3gnfA9X`
pour itérer la fonction de votre choix.

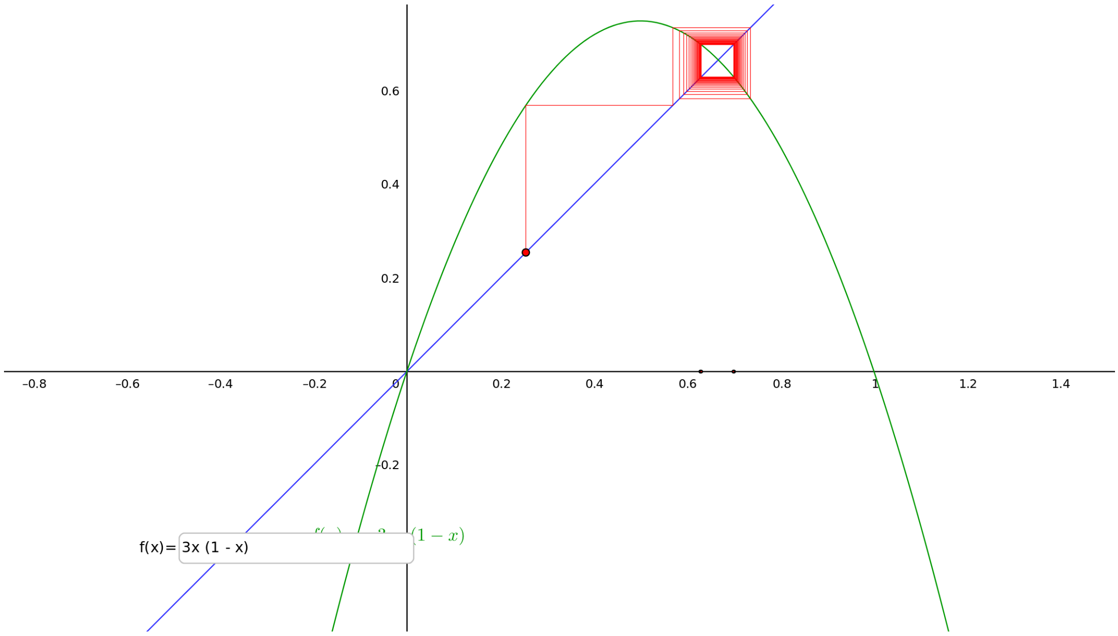


FIGURE 6.1 – Itération de $f(x)=3x(1-x)$

1 Cas f croissante

■ **Exemple 6.3** On prendra deux exemples :

— $f:[-1,1]\to[-1,1]$ donnée par $f(x)=\sin(x)$. On vérifie que les bornes de l'intervalle d'arrivée sont bien correctes puisque $\sin(1)<\sin(\pi/2)=1$. On note u la suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$.

— $g:[\sqrt{2},+\infty[\to[\sqrt{2},+\infty[$ donnée par $g(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$. On note v la suite définie par $v_{n+1}=g(v_n)$ et $v_0=2$. Une petite étude de fonction s'impose pour vérifier que v est bien définie. On remarque $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, g est dérivable et $g'(x)=\frac{x^2-2}{2x^2}$ est strictement positive sur $]\sqrt{2},+\infty[$. Par conséquent, g est strictement croissante sur $[\sqrt{2},+\infty[$ et g est bien définie (i.e. on peut bien prendre comme ensemble d'arrivée $[\sqrt{2},+\infty[$).

■

Proposition VI.1 Supposons que f est croissante. Alors, la suite u définie par itération de f est monotone. Si $u_1-u_0\geqslant 0$, u est croissante et si $u_1-u_0\leqslant 0$, elle est décroissante. Si f est strictement croissante alors : si $u_1-u_0>0$, u est strictement croissante et si $u_1-u_0<0$, u est strictement décroissante.

■ **Exemple 6.4** Qu-est ce que ca donne sur les exemples ?

— Dans l'exemple 1, sin est strictement croisssante sur $[-1,1]$ et on a $\sin(1)-1<0$. La suite u est donc strictement décroissante.

— Dans l'exemple 2, g est strictement croisssante sur $[\sqrt{2},+\infty[$ et on a $g(2)=3/2<2$. La suite v est donc strictement décroissante.

■

Démonstration. On ne fait que le cas f croissante et $u_1-u_0\geqslant 0$. Les autres cas sont laissés en exercice. Montrons que u est croissante. La preuve se fait par récurrence. L'hypothèse affirme que l'initialisation est vérifiée. Montrons l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que, $H_n : u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ est vraie. On applique f qui est croissante à cette inégalité, on obtient $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geqslant u_{n+1} = f(u_n)$. ■

Proposition VI.2 Supposons que f est croissante et que I est borné. Alors la suite u définie par itération de f est convergente.

■ **Exemple 6.5** Qu-est ce que ca donne sur les exemples ?
- Dans l'exemple 1, $I = [-1, 1]$ est bornée donc que u converge.
- Dans l'exemple 2, $I = [\sqrt{2}, +\infty[$ n'est pas bornée mais I est minorée et v est décroissante donc v converge.

■

Démonstration. La suite u est monotone (cf proposition précédente) et bornée donc convergente. ■

Proposition VI.3 Supposons que f est croissante et que I est un segment. Alors la suite u définie par itération de f est convergente vers une limite $\ell \in I$.

■ **Exemple 6.6** Qu-est ce que ca donne sur les exemples ?
- Dans l'exemple 1, $I = [-1, 1]$ est un segment donc $\ell_u \in I$.
- Dans l'exemple 2, $I = [\sqrt{2}, +\infty[$ n'est pas un segment. Pour s'y ramener, on peut changer les domaines de départ et d'arrivée de g, on considère $g : [\sqrt{2}, 4] \to [\sqrt{2}, 4]$, un calcul rapide montre que $g(4) < 4$ donc on peut restreindre les domaines comme annoncé. Ainsi, on se ramène au cas où g est définie sur segment et on obtient que $\ell_v \in I$.

■

Démonstration. On vient de voir que u converge vers ℓ. Reste à montrer que $\ell \in I$. On applique les gendarmes avec $a_n = a$ et $b_n = b$ les bornes de I. ■

2 Principe du point fixe

Proposition VI.4 Si la suite u définie par itération de f est convergente vers une limite $\ell \in I$ et que f est **continue** en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. ADMIS voir cours d'analyse du second semestre. ■

R On retiendra en particulier qu'une limite d'itération d'une fonction continue f si elle converge, converge vers un point fixe de f.

■ **Exemple 6.7** Qu-est que cela donne sur les exemples ?
- Dans l'exemple 1, f est continue, on obtient que $\sin(\ell_u) = \ell_u$ et $\ell_u \in [-1, 1]$ donc $\ell_u = 0$.

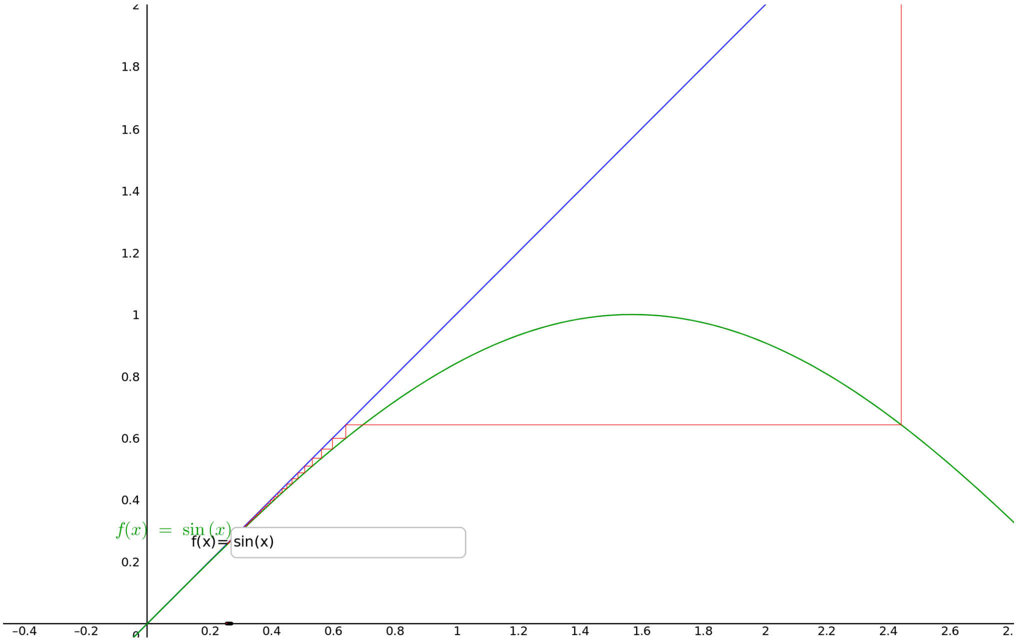


FIGURE 6.2 – Itération de $f(x) = \sin(x)$

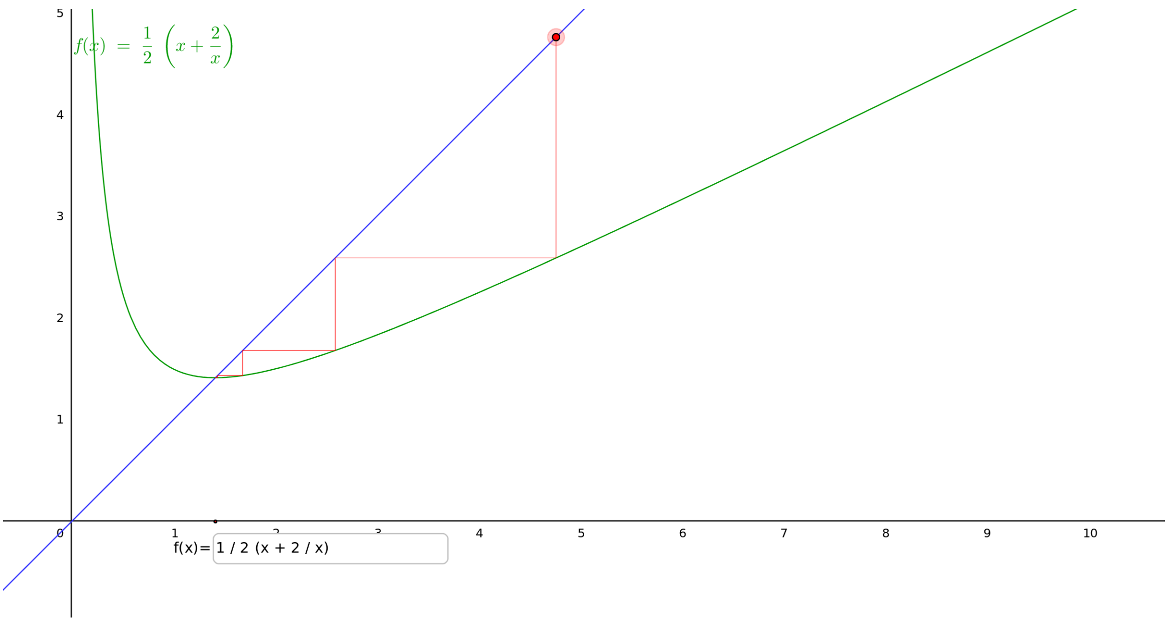


FIGURE 6.3 – Itération de $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

— Dans l'exemple 2, g est continue, on obtient que $g(\ell_v) = \ell_v$ et $\ell_v \in [\sqrt{2}, 4]$ donc $\ell_v = \sqrt{2}$.

■

3 Le cas le plus agréable

Proposition VI.5 Supposons que f est croissante continue et que I est un segment. Alors la suite u définie par itération de f est convergente vers une limite $\ell \in I$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. On met tout ensemble. ■

4 Cas f décroissante

Dans le cas où f est décroissante, il faut être prudent.

Proposition VI.6 Supposons que f est décroissante. Alors la suite u définie par itération de f vérifie que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Si, en outre, I est borné, ces deux suites sont convergentes. Si de plus, f est continue et l'équation $f^2(x) = x$ possède une unique solution ℓ sur I et u converge vers ℓ.

Démonstration. La fonction $f \circ f$ est croissante. On pose $v_n = u_{2n} = f^2(u_{2n-2}) = f^2(v_{n-1})$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les résultats de la partie précédente à v et w montrent que v et w sont monotones. Si, en outre I est bornée alors on obtient que v et w convergent vers ℓ_v et ℓ_w.

On suppose à présent f continue et que l'équation $f^2(x) = x$ possède une unique solution ℓ sur I. Pour montrer que u converge il faut et il suffit de montrer que $\ell_v = \ell_w$. On a vu que $f^2(\ell_u) = \ell_u$ et $f^2(\ell_v) = \ell_v$. Par unicité, on obtient que $\ell_u = \ell_v = \ell$. ■

■ **Exemple 6.8** On va itérer les deux fonctions suivantes : $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ donnée par $f(x) = 1/x + 1/2$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ donnée par $g(x) = 1/x^2 + 1/2$. On vérifie sans peine que l'itération est bien définie et que f, g sont décroissantes. On définit ainsi deux suites u et v avec $u_0, v_0 > 0$. On commence par f, on va montrer que dans ce cas la suite converge et exhiber la limite.

— On veut montrer que u est majorée par $5/2$ et minorée par $1/2$ pour $n \geqslant 2$.
— On remarque pour tout n, $u_n > 0$. on en déduit que pour pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1/2$.
— Montrons à présent par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant 5/2$.
— Initialisation : $u_2 = 1/u_1 + 1/2 \leqslant 2 + 1/2 = 5/2$.
— Hérédité : $u_{n+1} = 1/u_n + 1/2 \leqslant 2 + 1/2 = 5/2$.
— La suite u est donc bornée. Les suites extraites de terme paire et impaire sont monotones et bornées donc convergentes vers ℓ_{pair} et ℓ_{impair}.
— La fonction f^2 est continue donc ℓ_{pair} et ℓ_{impair} sont des points fixes de f^2.
— Or $f^2(x) = \frac{5x+2}{2x+4}$ et toute solution de l'équation $f^2(x) = x$ est une solution de l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$ qui possède une unique solution positive $r = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.
— Exo : montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes. Observer l'escargot du dessin :

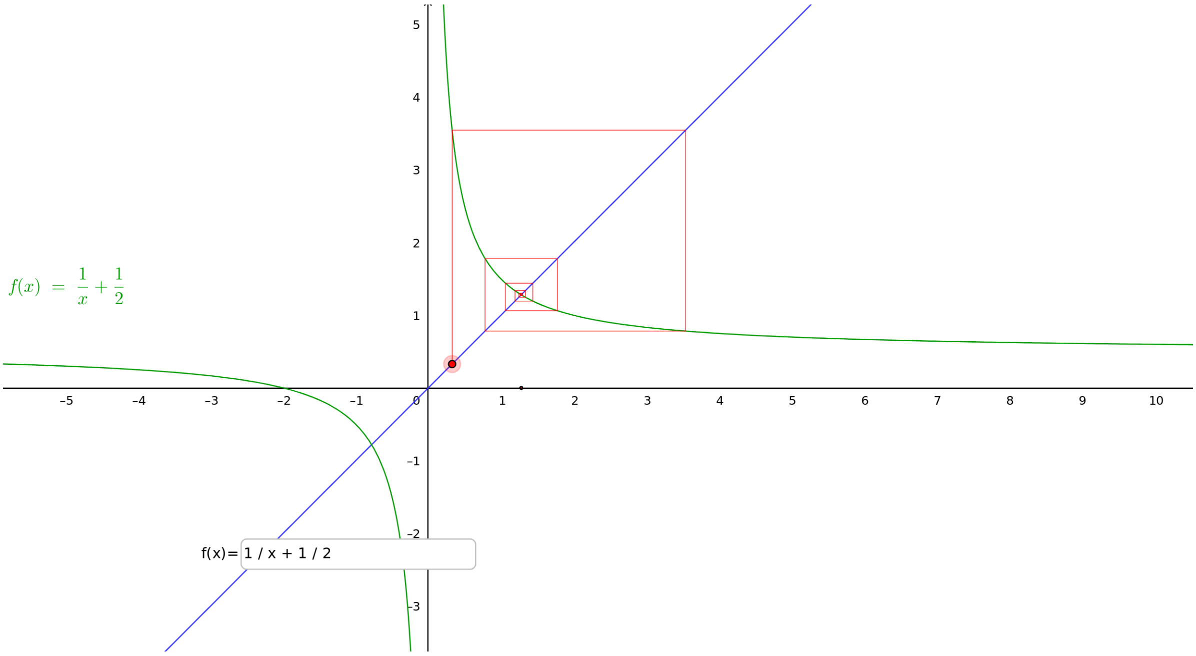


FIGURE 6.4 – Itération de $f(x) = 1/x + 1/2$

- On peut montrer que v est majorée par $9/2$ et minorée par $1/2$ pour $n \geqslant 2$. On procède exactement de la même façon (exo).
- La suite v est donc bornée. Les suites extraites de terme paire et impaire sont monotones et bornées donc convergentes vers ℓ_{pair} et ℓ_{impair}.
- Par contre, cette fois-ci, la fonction f^2 possède plusieurs points fixes strictement positifs (démo bcp + calculatoire).
- On se contentera des dessins de l'itération de g et g^2.

■

5 Cas f contractante

Proposition VI.7 On suppose qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|.$$

On suppose aussi qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. Alors la suite u définie par itération de f converge vers ℓ. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \alpha^n |u_0 - \ell|.$$

Démonstration. On fait une récurrence pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \alpha^n |u_0 - \ell|.$$

La convergence de u vers ℓ s'en déduit, grâce au théorème des gendarmes. L'initialisation est trivialement vraie. Hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose l'inégalité vérifiée au rang n, on applique l'inégalité :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|.$$

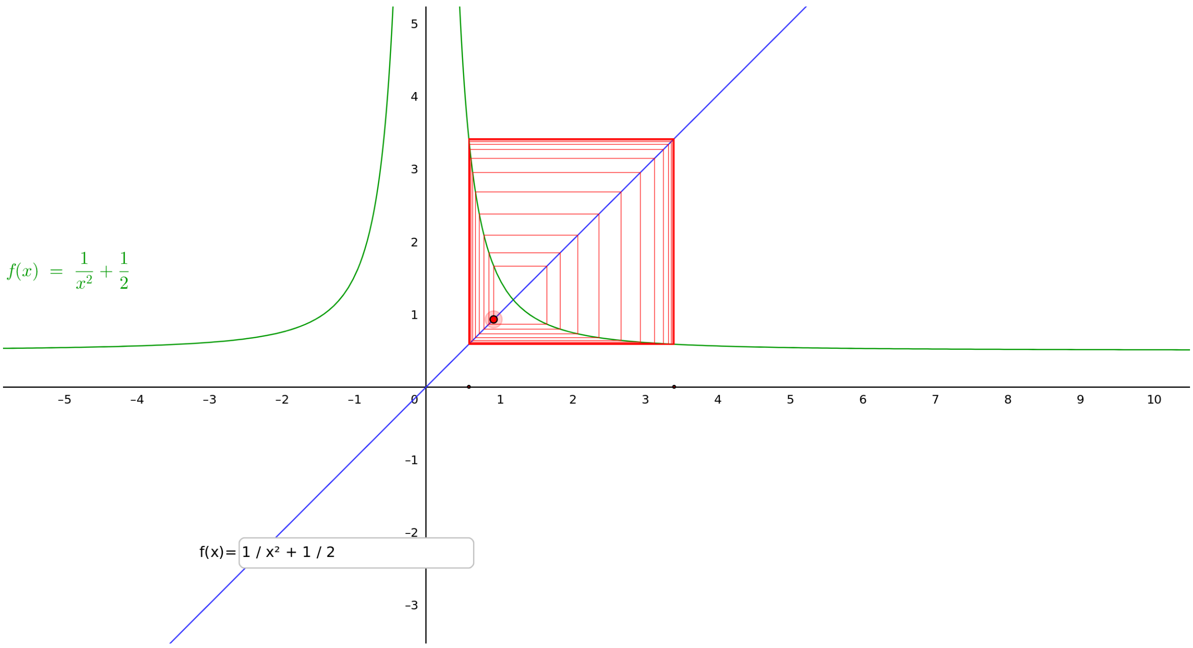


FIGURE 6.5 – Itération de $g(x) = 1/x^2 + 1/2$

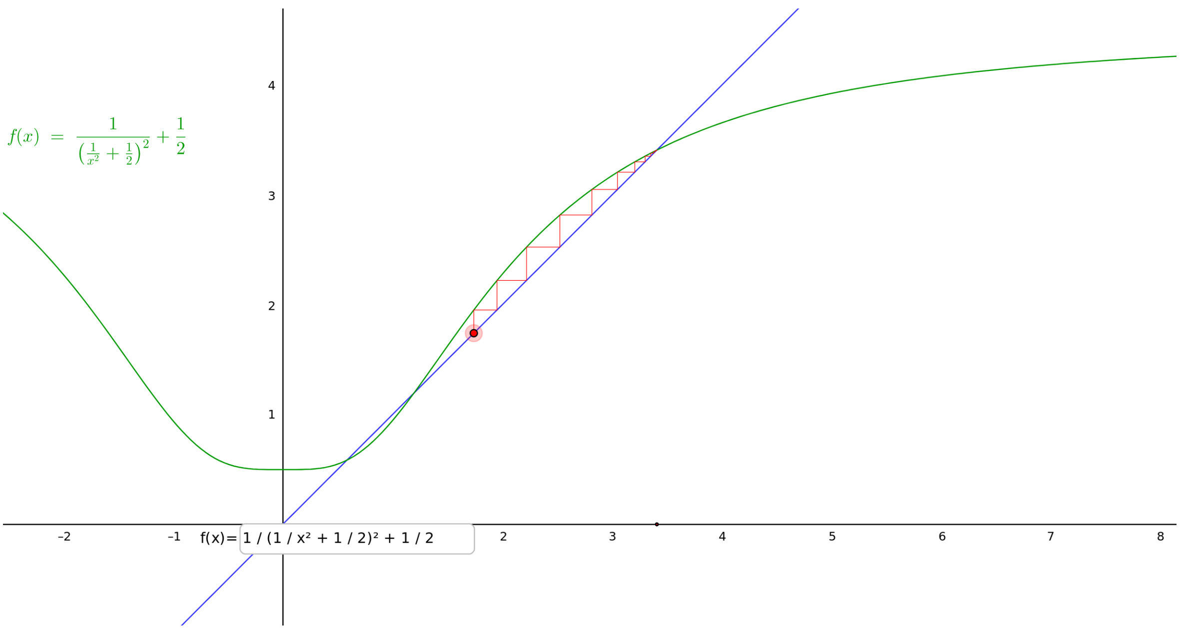


FIGURE 6.6 – Itération de $g \circ g$

avec $x = u_n$ et $y = \ell$. On obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \alpha |u_n - \ell| \leqslant \alpha \alpha^n |u_0 - \ell|.$$

D'où l'inégalité souhaitée au rang $n+1$. ■

Proposition VI.8 Soit $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| < 1$. Alors il existe un intervalle ouvert J contenant ℓ tel que si $u_0 \in J$, la suite u définie par itération de f vérifie que $u \to \ell$.

Démonstration. ADMIS, voir cours d'Analyse du second semestre. ■

VII Résolution numérique d'équation

1 Dichotomie

Principe : Utiliser le TVI et couper en deux...

Théorème VII.1 — Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Algo recherche de zéro de fonction continue par **la méthode de dichotomie** :

— Entrée : $a < b$ tel que $f(a), f(b) \neq 0$ sont de signes opposés.

— On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et on évalue $f(c)$.

— Si $f(c) = 0$, on s'arrête et on retourne c, on a trouvé un zéro de f.

— Si $f(c) \neq 0$, alors : $f(c)$ est de même signe que $f(a)$ **ou bien** $f(b)$.

  — Si $f(a)$ et $f(c)$ sont de même signe alors on pose $a = c$ et $b = b$, et on recommence l'algo.

  — Si $f(b)$ et $f(c)$ sont de même signe alors on pose $a = a$ et $b = c$, et on recommence l'algo.

Cet algorithme n'a pas de raison de s'arrêter. Il faut donc se fixer un nombre maximal N de boucles. Ainsi, après N boucles :

— Ou bien, l'algo s'est arrêté (ce qui est miraculeux) et on a un zéro de f.

— Ou bien, l'algo ne s'est pas arrêté et on a un intervalle $[a_N, b_N]$ de longueur $\frac{1}{2^N}(b-a)$ qui contient un zéro de f.

2 Méthode de la fausse position

La méthode de la fausse position est proche de la méthode de la dichotomie, on va essayer de mieux choisir c.

— Entrée : $a < b$ tel que $f(a), f(b) \neq 0$ sont de signes opposés.

— On pose a, b et :

$$c = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad \text{c'est le zéro de la sécante}^{1}$$

1. En effet, L'équation de la sécante est :$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ donc $y = 0$ donne $x = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$...

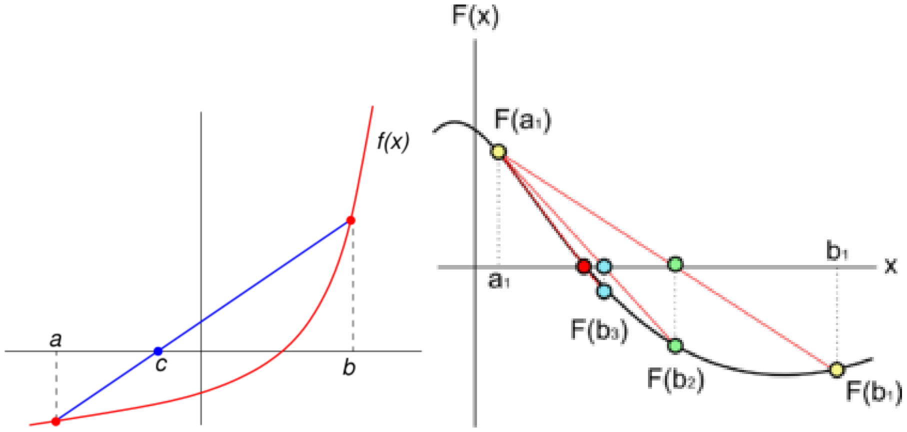


FIGURE 6.7 – Sécante entre deux points, $c = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$; illustration de la méthode de la sécante

et on évalue $f(c)$.

— Si $f(c) = 0$, on s'arrête et on retourne c, on a trouvé un zéro de f.

— Si $f(c) \neq 0$, alors : $f(c)$ est de même signe que $f(a)$ **ou bien** $f(b)$.

  — Si $f(a)$ et $f(c)$ sont de même signe alors on pose $a = c$ et $b = b$, et on recommence l'algo.

  — Si $f(b)$ et $f(c)$ sont de même signe alors on pose $a = a$ et $b = c$, et on recommence l'algo.

Cet algorithme n'a pas de raison de s'arrêter. Il faut donc se fixer un nombre maximal N de boucles. Ainsi, après N boucles :

— Ou bien, l'algo s'est arrêté (ce qui est miraculeux) et on a un zéro de f.

— Ou bien, l'algo ne s'est pas arrêté et on a une approximation d'un zéro de f (la vitesse de convergence vers un zéro est plus dur a évaluée).

Pour les fonctions continues, les méthodes de la dichotomie ou de la fausse position converge de façon *linéaire*, c'est à dire : :

$$|a_{n+1} - \ell| \leqslant \alpha |a_n - \ell|, \qquad \text{pour un certain } 0 < \alpha < 1$$

où ℓ est la limite de $(a_n)_n$, autrement dit :

$$|a_n - \ell| \leqslant \alpha^n |a_0 - \ell|.$$

3 Méthode de Newton

Sur la figure 6.8 qui illustre la méthode de Newton, on a :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En effet, l'équation de la tangente à f en x_n est :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

Le réel x_{n+1} vérifie donc l'équation :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$$

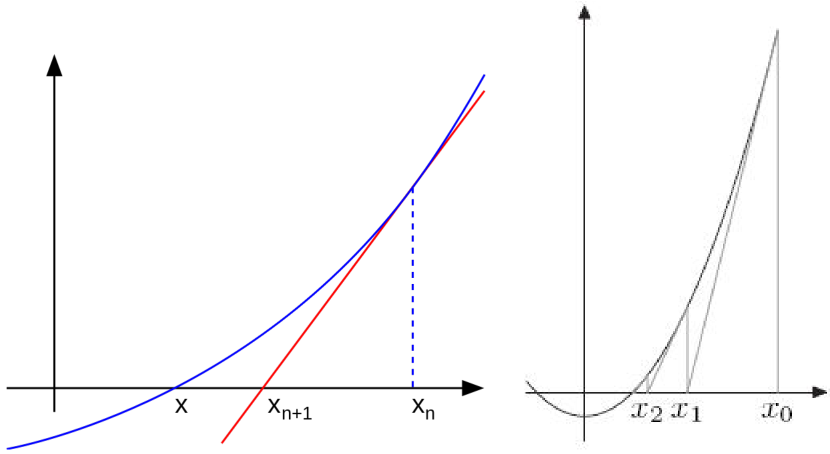


FIGURE 6.8 – Illustration de la méthode de Newton

D'où :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Proposition VII.2 — Méthode de Newton. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle qu'il existe $c, C > 0$ tels que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f''(x)| \leqslant C, \quad f'(x) \geqslant c.$$

On suppose que f s'annule dans $]a,b[$. Ce point est unique et est noté z. On pose :

$$\rho = \frac{C}{2c} \quad \text{et pour tout } x \in [a,b], \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors, on a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|\varphi(x) - z| \quad \leqslant \quad \rho |x - z|^2.$$

Pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha\rho < 1$ et tel que $I = [z - \alpha, z + \alpha]$ vérifie $I \subset [a,b]$ et $\varphi(I) \subset I$. La suite récurrente définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \quad u_0 \in I$$

converge vers z. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - z| \quad \leqslant \quad \rho^{-1} (\rho\alpha)^{2^n}.$$

On dit que la méthode de Newton est *quadratique*.

R On remarquera que pour que le théorème est un intérêt il faut α suffisament petit pour avoir $\rho\alpha < 1$. Autrement dit, il faut commencer par très loin de z pour que la théorie puisse s'appliquer. On peut par exemple, utiliser la méthode de la dichotomie pour s'approcher puis faire la méthode de Newton.

■ **Exemple 6.9** Soit $a > 0$. On prend $g(x) = x^2 - a$. On veut lui appliquer la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$. La méthode de Newton suggère d'itérer : $\varphi(x) = x - \frac{x^2-a}{2x} = \frac{x^2+a}{2x} = 1/2(x + a/x)$. On verra en TD que cette technique marche très très bien en prenant notamment $u_0 = a$. ■

Comparaison des 3 méthodes pour $a = 3$ en utilisant sagemath, le tableau indique le nombre de décimales correctes de l'estimé :

Nbs d'itérations	Dichotomie	Fausse Position	Newton
1	1	1	1
2	1	2	2
5	2	2	9
10	4	4	586
12	4	6	2343
100	30	30	$2^{30} \simeq 10^{10}$
n	$n/3$	$n/3$	$10^{n/3}$

R En fait, les points importants qui font que f est très efficace pour calculer le zéro z de g sont :

$$\varphi(z) = z \quad \text{et} \quad \varphi'(z) = 0$$

Pour info :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Lemme VII.3 — **Taylor-Lagrange à l'ordre 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors : Pour tout $x \neq a \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a, x[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c)$$

R Le même énoncé à l'ordre 1 : il existe $c \in]a, x[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

c'est le Théorème des accroissement finis (conséquence du Théorème de Rolle).

Démonstration. Soient $a \neq x \in \mathbb{R}$ fixés. Il existe un unique réel A tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + A\frac{(x-a)^2}{2}$$

On veut montrer qu'il existe $c \in]a, x[$ tel que $A = f''(c)$. On introduit la fonction ψ donnée par :

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - A\frac{(x-t)^2}{2}$$

On a :

— $\psi(x) = 0$ (trivial).
— $\psi(a) = 0$, par définition de A.
— $\psi'(t) = 0 - f'(t) - (x-t)f''(t) + f'(t) + A(x-t) = (x-t)(A - f''(t))$

On applique le Thm de Rolle à ψ, on obtient l'existence d'un $c \in]a,x[$ tel que :

$$\psi'(c) = 0 \quad \text{donc} \quad A = f''(c)$$

■

Démonstration. On applique Taylor-Lagrange à f pour $x = z$ et $a = x$, on obtient :

$$\underbrace{f(z)}_{=0} = f(x) + (z-x)f'(x) + \frac{(z-x)^2}{2}f''(c)$$

D'où :

$$f(x) = (x-z)f'(x) - \frac{(z-x)^2}{2}f''(c)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) - z &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - z \\ &= x - (x-z) + \frac{(x-z)^2 f''(c)}{2f'(x)} - z \\ &= \frac{(x-z)^2 f''(c)}{2f'(x)}\end{aligned}$$

D'où :

$$|\varphi(x) - z| \quad \leqslant \quad \frac{C}{2c}|x-z|^2 \quad = \quad \rho|x-z|^2$$

On a donc obtenu :

$$|u_{n+1} - z| \quad = \quad |\varphi(u_n) - z| \quad \leqslant \quad \rho|u_n - z|^2$$

Que l'on réécrit :

$$\rho|u_{n+1} - z| \quad \leqslant \quad (\rho|u_n - z|)^2$$

En posant :

$$a_n = \rho|u_n - z|$$

On a :

$$\ln(a_{n+1}) \leqslant 2\log(a_n)$$

Donc, via une récurrence, immédiate, on obtient :

$$\ln(a_n) \leqslant 2^n \log(a_0)$$

Autrement dit,

$$a_n \leqslant a_0^{2^n}$$

Autrement dit,

$$\rho|u_n - z| \quad \leqslant \quad \rho^{2^n}|u_0 - z|^{2^n} \quad \leqslant \quad \rho^{2^n}\alpha^{2^n}$$

■