Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°2 : Géométrie projective

Géométrie affine

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Montrer que deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux.
2. Montrer que si $\dim \mathcal{E} = 2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles.
3. Donner un exemple de deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes et non-parallèles.

Exercice 2

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F et G. On suppose que $F + G = E$. Montrer que tout sous-espace parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$.

Exercice 3

1. Montrer que l'image et l'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine. On pourra expliciter les directions.
2. Montrer que toute application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés.
3. Montrer que la composée de deux applications affines φ, ψ est une application affine et $\overrightarrow{\varphi \circ \psi} = \overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\psi}$.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ forme un groupe.

Espace projectif

Exercice 5 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. On suppose $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie).
3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*.
4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique dessin en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données. Expliquer la construction.

Exercice 6 (Droite projective réelle)

Justifier que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'on a une bijection (ensembliste)

$$\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k) \qquad (1)$$

2. Dans (1), que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$?

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Rappeler pourquoi $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de k^{n+1}.
4. Montrer que ses espaces sont compacts et connexe par arcs.
5. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert.

Exercice 8 (Quelques isomorphismes exceptionnels)

1. Soit E un k-espace vectoriel de dimension au moins 1. Montrer qu'on a des morphismes de groupe $\mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \to \mathfrak{S}\big(\mathbb{P}(E)\big)$.
2. Rappeler les définitions de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$. Sur quel ensemble ces groupes agissent-ils naturellement ? Que peut-on dire de l'action ?
3. Montrer les isomorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
4. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
5. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Il existe d'autres isomorphismes exceptionnels, voir Perrin fin du chapitre IV.

Envoi à l'infini

Exercice 9 (Un peu de dessin)

Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

1. seulement un sommet ;
2. seulement un côté ;
3. seulement une diagonale.

Exercice 10 (Théorème de Desargues)

Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

Exercice 11

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m. Soit $o \neq m$ un point de d_1. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 12 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k-espace vectoriel et soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $\phi := \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f, que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 13 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ une homographie.

1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.
2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.

3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 14 (Constructions à la règle)

Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d.
2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ?

Exercice 15 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB). On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives.

Exercice 16 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants.
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D.

Birapport

Exercice 17 (Division harmonique)

Soient A, B, C, D quatre points d'une droite affine réelle en division harmonique. Montrer qu'un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

Exercice 18 (Droites concourantes)

Soient (O, A, B, C) et (O, A', B', C') deux quadruplets de points distincts et alignés. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

Exercice 19 (Quelques identités)

1. Trouver les homographies de $\mathbb{P}^1(k)$ qui fixent 1 et qui échangent 0 et ∞.
2. En déduire une preuve sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$.
3. Prouver de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 20 (Moins de monde que prévu !)

On considère l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur les quadruplets et soient a, b, c, d quatre points alignés.

1. Déterminer l'orbite du birapport $[a, b, c, d]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est en général le sous-groupe $V \subseteq \mathfrak{S}_4$ engendré par les doubles transpositions.

Exercice 21 (Une autre identité)

Soient a, b, m, n, p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité :

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

Droite projective complexe

Exercice 22 (Image de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$;
2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+iz}$;
3. l'image de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0, 1[\times\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.

Exercice 23 (Théorème des six birapports)

Soient $a, b, c, d, a', b,', c', d'$ 8 points d'une droite projective.

1. Dessiner un cube en disposant les points $a, b, c, d, a', b', c', d'$ afin que les six faces du cubes soient :
$$\{a, b, c', d'\}, \{b, c, a', d'\}, \{c, a, b', d'\}, \{a', b', c, d\}, \{b', c', a, d\}, \{c', a', b, d\}.$$
2. Montrer l'égalité $[a, b, c', d'][b, c, a', d'][c, a, b', d'][a', b', c, d][b', c', a, d][c', a', b, d] = 1$.
3. En déduire le Théorème de Miquel : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ tels que $\sharp\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+1} = 2$, pour $i = 1, \ldots, 4$, on note ses deux points A_i, A_i'. Supposons que les non-prime et les prime sont au bon endroit. Les $A_1, \ldots, A_4$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points $A_1', \ldots, A_4'$ sont cocycliques ou alignés.
4. En déduire le Théorème de Simson : Soit ABC un triangle. Soit M un point du plan euclidien. On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites $(AB), (BC), (CA)$. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le circonscrit à ABC.

   Voir l'exo III.34 du Audin pour une troisième application.

Exercice 24 (Automorphismes du disque)

Soit
$$\mathbb{D} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$
le disque unité de $\mathbb{C}$. On appelle *automorphisme* de $\mathbb{D}$ une bijection biholomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même.

1. On rappelle une version du lemme de Schwarz : si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, fixe 0 et vérifie $|f| \leq 1$ alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, s'il existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors f est une rotation. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{D}$ qui fixe 0 est une rotation.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$.
3. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, trouver une homographie qui préserve $\mathbb{D}$ et qui envoie w sur 0.
4. En déduire que tout automorphisme de $\mathbb{D}$ est une homographie, dont on précisera la forme.
5. Trouver une homographie qui envoie $\mathbb{D}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im} > 0\} \subseteq \mathbb{C}$.
6. En déduire que tout automorphisme de $\mathbb{H}$ est une homographie de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 25 (Quadrique projective)

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit q une forme quadratique sur E. On appelle *quadrique associée à q* le sous-ensemble de $\mathbb{P}(E)$ défini par
$$Q \coloneqq \pi\Big(\{x \in E \setminus \{0\} : q(x) = 0\}\Big),$$
où $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ est la projection canonique.

1. Monter que Q est bien définie.
2. On suppose $\dim E = 2$. Montrer que si Q contient au moins trois points alors $Q = \mathbb{P}(E)$.
3. On suppose $\dim E = 3$. Montrer que si Q contient une droite d alors $Q = \mathbb{P}(E)$ ou $Q = d \cup d'$ où d' est une droite de $\mathbb{P}(E)$.
4. Soit d une droite de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que si d rencontre Q en au moins trois points alors $d \subseteq Q$.
5. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Monter que Q rencontre chaque droite de $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 26

Soient $p < x < y < q \in \mathbb{R}$. Soient $r, s \geqslant 0$.

1. Montrer l'inégalité suivante :
$$[p : q : x : y] \leqslant [p - r : q + s : x : y]$$
2. Caractériser le cas d'égalité.
3. Soit $x < z < y$, montrer l'inégalité :
$$[p : q : x : z] < [p : q : x : y]$$

Exercice 27

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. On va définir la *distance de Hilbert* sur Ω. Soient $x, y \in \Omega$. On note p, q les points d'intersection de (xy) avec $\partial\Omega$. En supposant p, x, y, q alignés dans cet ordre. On pose :

$$d(x, y) = \ln([p : q : x : y])$$

On va montrer que d est une distance.

1. Montrer la symétrie et la séparation.
2. Soient x, y, z trois points de Ω tel que $z \in [xy]$ alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$
3. Soient x, y, z trois points de Ω. Faites une figure avec beaucoup de droites. Montrer l'inégalité triangulaire.
4. Montrer que les boules fermées sont des convexes compactes.
5. Montrer que si Ω est strictement convexe alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ entraine que $z \in [x, y]$.