Théorie des Groupes et Géométrie

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Contrôle Continu n°2
Une heure

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Tous les documents sont interdits.

Questions de cours **6pts**

Soit k un corps et $n \geqslant 1$ un entier.

1. Soient D, D' deux droites distinctes du plan projectif $k\mathbb{P}^2$. Montrer que D et D' se rencontrent en un unique point. 1pt

On suppose maintenant k fini.

2. Donner et démontrer une formule donnant le nombre de points de l'espace projectif $k\mathbb{P}^n$ de dimension n. 1pt

3. Donner et démontrer une formule donnant le nombre de droites du plan projectif $k\mathbb{P}^2$. 2pts

4. Donner et démontrer une formule donnant l'ordre de $\mathrm{GL}_n(k)$. 1pt

5. Donner et démontrer une formule donnant l'ordre de $\mathrm{PGL}_n(k)$. *(On admettra que le centre de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *est formé des matrices scalaires inversibles.)* 1pt

Exercice 1 **5pts**

Soit $q \geqslant 2$ une puissance d'un nombre premier et soit $\mathbb{F}_q$ le corps de cardinal q.

1. Construire un morphisme injectif $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$. *Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice précédent.* 1pt

Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ *agit fidèlement sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$*, cette action fournit un morphisme injectif de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ *vers le groupe des bijections de l'ensemble* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$*. Or* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ *est de cardinal* $q+1$*, on obtient donc un morphisme injectif de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ *vers* $\mathfrak{S}_{q+1}$.

On suppose maintenant $q = 5$.

2. En déduire proprement que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$. *On pourra utiliser librement le résultat suivant*[1] *: tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.* 1pt

$\sharp\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = (q^2-1)(q^2-q) = (q-1)(q+1)q(q-1)$, $\sharp\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) = \sharp\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/(q-1) = (q-1)q(q+1)$. *En particulier,* $\sharp\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) = 6\cdot 5\cdot 4 = 5!$. *Comme le morphisme φ est injectif, on obtient que* $\varphi(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5))$ *est un sous-groupe d'indice* $6!/5! = 6$ *de* $\mathfrak{S}_6$*. L'indication nous montre que* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \varphi(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)) \simeq \mathfrak{S}_5$.

3. En déduire qu'il existe un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ qui n'est pas conjugué au stabilisateur de 6 pour l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\{1, \ldots, 6\}$. 2pts

Le sous-groupe $\varphi(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5))$ *de* $\mathfrak{S}_6$ *est isomorphe à* $\mathfrak{S}_5$*. L'action de* $\varphi(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5))$ *sur* $\{1, ..., 6\}$ *est transitive puisque l'action de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ *sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ *est transitive. Si* $\varphi(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5))$ *était conjugué au stabilisateur de 6 alors il stabiliserait un certain* $i \in \{1, ..., 6\}$ *et ne pourrait agir transitivement.*

4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. 1pt

1. Cf. exo 3, CC1 ou exo 17, TD 1

Pour calculer l'ordre de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$*, on calcule d'abord l'ordre de* $\mu_2(\mathbb{F}_5)$*. On a :* $1^2 = (-1)^2$ *et* $2^2 = (-2)^2 = -1$ *donc* $\sharp\mu_2(\mathbb{F}_5) = 2$*. Le groupe de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ *est le quotient* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)/_{\mu_2(\mathbb{F}_5)}$*. Or* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ *est d'ordre* $5!$ *donc* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ *est d'ordre* 60*.*

En particulier, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ *est d'indice* 2 *dans* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$*. Or, pour tout* $n \geqslant 2$*,* $\mathfrak{S}_n$ *admet un unique sous-groupe d'indice* 2 *:* $\mathfrak{A}_n$*, donc* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$*.*

Notation pour l'exo 2 et l'exo 3. Soient A, B, C trois points distincts alignés d'un plan affine sur un corps k.

- On note $\frac{AC}{AB}$ l'unique élément $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ tel que l'homothétie h de centre A et de rapport λ vérifie $h(B) = C$.
- On complète le plan affine en un plan projectif. Soit $\mathcal{D} = (AB) \cup \{\infty_{(AB)}\}$ la droite projective d'hyperplan affine la droite (AB) et de point à l'infini $\infty_{(AB)}$. Si $D \in \mathcal{D}$, le birapport $[A, B, C, D]$ est le point $f(D) \in k\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ où $f : \mathcal{D} \to k\mathbb{P}^1$ est l'(unique) homographie qui envoie A sur ∞, B sur 0 et C sur 1.

Exercice 2 **3pts**

Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés d'un plan affine.

1. Montrer que : 2pts

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{BC}$$

On note k *le corps de base. On se donne* φ *un isomorphisme entre la droite affine* (AB) *et la droite affine* k*, et on note* a, b, c, d *les coordonnées de* A, B, C, D *obtenues via* φ*. Ainsi, on obtient pour tout triplet de points distincts* U, V, W *avec les notations évidentes :*

$$\frac{UW}{UV} = \frac{w-u}{v-u} \quad \text{car} \quad h : x \mapsto \frac{w-u}{v-u}(x - v) + w$$

est l'unique homothétie de centre u *qui vérifie* $h(v) = w$ *et son rapport est bien* $\frac{w-u}{v-u}$*. Or,*

$$[A, B, C, D] = \frac{d-b}{d-a} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b} = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{BC}$$

On insiste sur le fait que AC *tout seul n'a aucun sens... uniquement la notation* $\frac{AC}{AD}$ *a un sens et que la notation sous forme de fraction est juste une notation... qui se révèle être une bonne idée une fois qu'on prend des coordonnées.*

2. Montrer que : 1pt

$$[A, B, C, \infty_{(AB)}] = \frac{CA}{CB}$$

On reprend les mêmes notations, en prenant soin de remarquer que l'on prolonge φ *en un isomorphisme entre la droite projective* (AB) *et la droite projective* $k \cup \{\infty\}$*.*

$$[A, B, C, \infty_{AB}] = \frac{\infty - b}{\infty - a} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{c-a}{c-b} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{CA}{CB}$$

Exercice 3 **9pts**

Soit ABC un triangle d'un plan projectif. Soient d', d'' deux droites quelconques ne passant pas par A, B ou C. On note $A' = (BC) \cap d'$, $B' = (CA) \cap d'$, $C' = (AB) \cap d'$ et $A'' = (BC) \cap d''$, $B'' = (CA) \cap d''$, $C'' = (AB) \cap d''$.

1. Faire un dessin. 1pt

2. Montrer que : 3pts

$$[A, B, C', C''] \times [B, C, A', A''] \times [C, A, B', B''] = 1$$

Indication : on pourra faire en sorte que les droites d' et d'' soient parallèles puis utiliser le théorème de Thalès et l'exo 2.

On choisit une droite contenant l'intersection des droites d' et d'' et on envoie à l'infini cette droite. On obtient ainsi un plan affine dans lequel les droites d' et d'' sont parallèles. Le théorème de Thalès appliqué dans les bons triangles affirme que :

$$\frac{AB'}{AB''} = \frac{AC'}{AC''} \qquad \frac{BA'}{BA''} = \frac{BC'}{BC''} \qquad \frac{CA'}{CA''} = \frac{CB'}{CB''}$$

L'exo 2 nous a montré que :

$$[A, B, C', C''] \times [B, C, A', A''] \times [C, A, B', B''] = \frac{AC'}{AC''}\frac{BC''}{BC'}\frac{BA'}{BA''}\frac{CA''}{CA'}\frac{CB'}{CB''}\frac{AB''}{AB'} = 1$$

3. En déduire le Théorème de Menelaüs - sens direct **et** en faire un dessin : 3pts

Soit ABC un triangle d'un plan affine. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ avec $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \varnothing$. Si les points A', B' et C' sont alignés alors on a l'égalité :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

On applique le point 2 de l'exo 3 que l'on vient de montrer, en prenant d'' la droite à l'infini du plan affine. On obtient :

$$[A, B, C', \infty_{(AB)}] \times [B, C, A', \infty_{(BC)}] \times [C, A, B', \infty_{(CA)}] = 1$$

On utilise à présent, le point 2 de l'exo 2 et on obtient :

$$\frac{C'A}{C'B} \times \frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = 1$$

4. À l'aide du Théorème de Menelaüs - sens direct, montrer la réciproque du Théorème de Menelaüs - sens direct : si $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$ alors A', B' et C' sont alignés. 2pts

On considère $\tilde{C} = (A'B') \cap (AB)$. On va montrer que $C' = \tilde{C}$. Le théorème Menelaüs - sens direct nous montre que :

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B} \times \frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = 1$$

Or par hypothèse, on a :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B} = \frac{C'A}{C'B} \quad \text{autrement dit} \quad [A, B, C', \infty_{(AB)}] = [A, B, \tilde{C}, \infty_{(AB)}]$$

Donc $\tilde{C} = C'$.