UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°1
Une heure

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Tous les documents sont interdits.

Questions de cours

Soit p un nombre premier.

1. Rappeler la définition d'un p-groupe.

2. Rappeler la définition du centre d'un groupe.

3. Montrer que le centre d'un p-groupe est non trivial. *Indication* : on pourra faire agir le groupe sur lui-même par conjugaison.

Exercice 1

Soit G un groupe d'ordre 56. Le but de cet exercice est de montrer que G est résoluble non-simple. On commence par montrer que G n'est pas simple. Raisonnons par l'absurde et supposons que G est simple.

1. Compter le nombre d'éléments de G d'ordre 7.

2. Toujours en comptant le nombre d'éléments, en déduire que G possède un unique 2-Sylow.

3. Conclure à la non-simplicité de G.

4. Montrer que tout groupe d'ordre 56 est résoluble.

Exercice 2

Soit G un groupe dans lequel tout élément est d'ordre au plus 2. Montrer que G est abélien.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de classifier les groupes d'ordre 8.

1. Lister les groupes abéliens d'ordre 8.

Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

2. Montrer que G possède un élément r d'ordre 4 et aucun élément d'ordre 8. *Indication* : on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 2.

3. Montrer que $\langle r\rangle$ est distingué dans G.

4. Soit $s \in G \setminus \langle r\rangle$.

- **a.** Montrer que $srs^{-1} \in \{r, r^{-1}\}$.
- **b.** Montrer que $srs^{-1} = r^{-1}$.

5. En déduire que si $G \setminus \langle r \rangle$ possède un élément d'ordre 2 alors G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_4$ d'ordre 8.
6. Si $t \in G \setminus \langle r \rangle$ n'est pas d'ordre 2, montrer que $t^2 = r^2$.
Commentaire : on montre facilement que le groupe suivant, défini par générateurs et relations,
$$\mathbb{H} := \langle \mathsf{r}, \mathsf{t} : \mathsf{r}^4 = 1, \mathsf{r}^2 = \mathsf{t}^2, \mathsf{t}\mathsf{r}\mathsf{t}^{-1} = \mathsf{r}^{-1} \rangle,$$
appelé groupe des quaternions*, est d'ordre* 8*. On a alors montré que* $G \simeq \mathbb{H}$*.*

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n.

1. Traiter les cas $n \in \{2, 3\}$.
2. On rappelle qu'un groupe d'ordre 6 est soit cyclique soit isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. En déduire le cas $n = 4$.

On suppose maintenant que $n \geqslant 5$. On considère l'action (à gauche) de $\mathfrak{S}_n$ sur les classes à droites $\mathfrak{S}_n/G = \{\sigma G : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ et on note $\phi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n/G)$ le morphisme associé.

3. Montrer que l'action est fidèle. (On pourra utiliser sans justification que, puisque $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ et $\{1\}$.)
4. En déduire que ϕ est un isomorphisme.
5. Montrer que G est le stabilisateur de la classe $G \in \mathfrak{S}_n/G$ et en déduire que G agit sur un ensemble à $n-1$ éléments.
6. En déduire que $G \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.